Esercizi in preparazione all'esame di MEPVS
Aritmetica, 2020/2021

- Si dimostrino le proprietà associativa e commutativa della somma, alla luce degli assiomi di Peano-Dedekind e della definizione (tramite ricorsione) della somma.
- D_r designi il taglio di Dedekind associato al numero razionale $r \in \mathbb{Q}$, $D_r = \{x \in \mathbb{Q} : x > r\}$. Sia $T = \big\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 > 2\big\}$. Si dimostri che se esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $D_r = T$, allora $r^2 = 2$.
- Sulla scorta della definizione della operazione prodotto tra due tagli di Dedekind si provi che $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.
- Si applichi la procedura di Legendre (che, come sappiamo, fa uso delle frazioni continue) per scomporre 41 come somma di due quadrati. (La scomposizione è ovviamente quella fornita dagli interi 4 e 5.)
- Trovare la soluzione (minima) dell'equazione di Pell $x^2 - 33y^2 = +1$.
- Sappiamo che 4 ammette due fattorizzazioni distinte mediante "primi" in in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$: 2×2, $(1 - \sqrt{-3}) \times (1 + \sqrt{-3})$. Per mostrare che il principio di fattorizzazione unica è effettivamente ripristinato in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$, si trovino due unità $u, \bar{u} \in \mathbb{Z}[\zeta_3]$, tali che $2u \times 2\bar{u} = (1 - \sqrt{-3}) \times (1 + \sqrt{-3})$
- Si considerino le classi di resto $\bmod \sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$: si dimostri che esse sono solamente tre e che coincidono con le classe di: $0, 1, -1$.
- Provare che la norma di un intero di Hurwitz è un intero ordinario.