

Esercizi per l'esame di MEPVS Geometria 2020/21

- Si descrivano tutte le geometrie di incidenza (sistemi per i quali valgono I1-I3) su un insieme di quattro punti? Quali soddisfano al postulato di Playfair?
- Usando gli assiomi di incidenza, di ordine e il teorema di separazione della retta si dimostrino le seguenti implicazioni:
 - a) $A * B * C$ e $B * C * D$ implicano $A * B * D$ e $A * C * D$.
 - b) $A * B * D$ e $B * C * D$ implicano $A * B * C$ e $A * C * D$.
- Si dimostri (a partire dagli assiomi di incidenza e di ordine) che l'interno di un triangolo è non vuoto.
- A partire dagli assiomi di incidenza, ordine e congruenza, trovare una procedura per tracciare una retta perpendicolare a una retta data e passante per un punto non appartenente alla retta.
- Si scriva una dimostrazione dettagliata di Euclide I.20 in un piano di Hilbert.
- Si dimostri che in \mathbb{H} valgono gli assiomi di ordine $B1 - B4$. (Occorre dapprima definire nel modello una opportuna relazione d'ordine in termini della relazione d'ordine canonica nel piano cartesiano euclideo).
- In geometria iperbolica prende il nome di *orociclo* il luogo dei punti perpendicolare ad un fascio di parallele limite (si intende con questa espressione l'insieme di tutte le rette che sono mutualmente parallele limite, cioè che convergono nel medesimo punto all'infinito.) Si dia una caratterizzazione degli orocicli in \mathbb{H} e in \mathbb{D} .
- Si dimostri che nel piano iperbolico il luogo dei punti equidistanti da una retta data (tale luogo è detto iperciclo) non è una retta.
- Si risponda (argomentando) al seguente quesito. Nel piano iperbolico per tre punti non allineati passa sempre una circonferenza iperbolica?
- Si ricavi la legge dei coseni II a partire dalla legge dei coseni I.
- Si dimostri che il gruppo $\text{Möb}(\mathbb{H})$ agisce transitivamente sull'insieme delle rette iperboliche.
- Dati due punti distinti del piano iperbolico, il luogo dei punti equidistanti da essi è una retta? Trovare in \mathbb{H} la sua espressione analitica.