Storia della Matematica 2022-2023

Alberto Cogliati

Università di Pisa

October 11, 2023

Le origini del calcolo infinitesimale possono essere fatte risalire sino alla matematica greca, nel senso che già in epoca classica si cominciò ad affrontare e a risolvere – almeno in parte – problemi che non esiteremmo a ricomprendere entro il campo dell'analisi matematica: calcolo di aree, di volumi, determinazioni di rette tangenti e di rette normali a curve (elementari) assegnate.
Occorre tuttavia precisare che la matematica greca si caratterizzò per un rifiuto consapevole e radicale di procedure di limite di ogni tipo; essa escogitò tecniche tanto eleganti quanto rigorose che consentirono di risolvere un gran numero di problemi di contenuto analitico senza ricorso a nozioni di carattere infinitesimale: la determinazione dell'area cerchio, del settore parabolico, del volume e della superficie della sfera, del volume della piramide, la costruzione di rette tangenti e normali a curve coniche, sono alcuni esempi nei quali tali tecniche poterono dispiegare la propria efficacia.

Caratteri della matematica greca

Lo studio del *corpus matematico* greco in generale e più in particolare di quelle sue parti che sono in qualche modo connesse allo sviluppo storico dell'analisi, è reso arduo dalla difficoltà oggettiva di riconnettere il dato testuale alla sensibilità matematica odierna. Sintetizzando e semplificando molto, la matematica greca si caratterizza per una mancanza pressoché totale di linguaggio simbolico e per una tendenza a ragionare e risolvere problemi mediante nozioni e concetti di natura prevalentemente geometrica.
Così ad esempio la teoria delle proporzioni che costituisce una delle più alte creazioni della scienza antica era enunciata rispetto ad imprecisate grandezze che possiamo sostanziare all'occorrenza con segmenti di rette, regioni piane, angoli, ecc.. e la determinazione dell'area di date regioni di piano o del volume di porzioni di spazio, non veniva mai esplicitata nell'attribuzione di un numero o una formula per calcolare aree e volume ma sempre espressa in termini di rapporti o di costruzioni geometriche più elementari.
Naturalmente la nozione di numero compare negli stessi *Elementi* e in altre opere del corpus greco, tuttavia dovremmo sempre tenere a mente che il concetto ricomprende un ambito ben più limitato rispetto ai campi numerici odierni (razionale, reale).

Per rendercene conto possiamo rivolgerci al libro VII degli *Elementi*. Propriamente sono numeri solo i numeri interi positivi maggiore di 2. Infatti, secondo la Def VII.2, numero è "una molteplicità composta di unità"; l'unità non è a rigore un numero, poiché la definizione di numero richiede che siano presenti più unità. La nozione di multiplo veniva ricondotta alla possibilità di essere misurato completamente da un altro numero; più precisamente Euclide esprimeva il concetto affermando che un numero è parte di un altro (maggiore) quando il primo misura completamente il secondo; di contro, un numero è parti di un altro quando non lo misura completamente, il che significa che esso è una frazione propria del primo. Da notare che pur presente, la nozione di numero razionale non sembra contraddistinta da uno stato concettualmente autonomo; di gran lunga prevalente è la relazione tra due numeri interi assegnati, non il "numero razionale" in sé. E' tuttavia doveroso segnalare che in Def. VII.21 viene formalizzata, seppur indirettamente, l'idea di uguaglianza di due rapporti di numeri interi:

Il rapporto fra interi

Numeri in proporzione sono quando il primo del secondo e il terzo del quarto sia o equimultiplo o la stessa parte o le stesse parti.

Definizione questa che può essere resa simbolicamente (e dunque mediante un anacronismo) nel modo seguente: a, b, c, d sono in proporzione quando esistono numeri interi m, n tali per cui :

$$a = m\left(\frac{b}{n}\right) \quad c = m\left(\frac{d}{n}\right);$$

è chiaro che nel caso in cui $n = 1$ il primo e il terzo sono "equimultipli" del secondo e del quarto; se $m = 1$, il primo e il terzo sono la "stessa parte" del secondo e del quarto; infine, se $n \neq 1 \wedge m \neq 1$, il primo e terzo sono le "stesse parti" del secondo e del quarto.

Gli *Elementi* di Euclide, III a.C.

- Trattazione composta di 13 Libri
- Libro I. Dopo tre serie di principi (definizioni, postulati, assiomi), che costituiscono una specie di introduzione generale a tutta l'opera, vengono esposte l'uguaglianza (isometria) dei triangoli, la teoria delle perpendicolari, la teoria delle parallele, la teoria dell'equivalenza dei poligoni. Il libro I ruota attorno a due teoremi fondamentali: la prop. 32 (somma degli angoli interni di un triangolo uguale a due retti) e la prop. 47-48 (teorema di Pitagora) col quale si conclude.
- Libro II. Vi vengono ripresi e condotti a termine alcuni procedimenti già iniziati nel libro precedente giungendo alla quadratura di un poligono qualunque, cioè alla costruzione di un quadrato equivalente ad un poligono dato.
- Libro III. È dedicato alla teoria del cerchio.
- Libro IV. Si danno le costruzioni dei poligoni regolari inscritti e circoscritti (triangolo, quadrato, esagono, pentagono e pentadecagono).
- Libro V. Contiene la teoria generale delle grandezze e delle proporzioni.

- Libro VI. Contiene le applicazioni geometriche della teoria delle proporzioni: vengono cioè studiate le proprietà dei poligoni simili (segmento terzo, quarto proporzionale, sezione aurea di un segmento). Termina con la generalizzazione dei problemi di quadratura affrontati nel secondo libro: un poligono viene trasformato in un altro equivalente di forma assegnata.
- Libri VII, VIII, IX. Sono i libri aritmetici degli *Elementi*, dove aritmetica è da intendersi nel senso della teoria dei numeri: vengono trattati quasi esclusivamente i numeri interi e le loro proprietà (proporzione tra numeri interi, massimo comun divisore e minimo comune multiplo, decomposizione dei numeri interi in fattori primi, numeri notevoli, potenze, progressione geometrica). Le proprietà sono sempre studiate in generale, senza dare un solo esempio numerico.
- Libro X. Più lungo e complesso, studia in modo minuzioso e raffinato le cosiddette irrazionalità quadratiche, ossia i "numeri irrazionali" che si ottengono mediante estrazioni di radici ripetute.
- Libri XI, XII, XIII. Vi sono svolti i principi della stereometria. Vi è applicato il metodo di esaustione per la determinazione di alcune aree piane e del volume della piramide. Termina con lo studio dei cinque poliedri regolari (solidi platonici): tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro, dodecaedro.

La trattazione del libro V, intesa come ampliamento della teoria dei rapporti aritmetici, fu in larga parte dettata dalla necessità di rendere conto dell'esistenza di grandezze incommensurabili quali il lato e la diagonale di un quadrato assegnato. La scoperta dell'esistenza di grandezze incommensurabili, avvenuta in seno alla scuola pitagorica, determinò una vera e propria crisi fondazionale che minò l'ideale pitagorico di un mondo descrivibile in termini di soli numeri interi. Due sono le definizioni fondamentali della teoria. La prima Def. V.4: *Si dice che hanno tra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente.*

In termini odierni, Euclide richiede che le grandezze in discorso sono archimedee nel senso cioè che, date grandezze A, B esiste un multiplo di una grandezza che superi l'altra: $mA > B$. Un esempio di grandezze non archimedee, pure presenti negli *Elementi*, è la classe degli angoli rettilinei e degli angoli curvilinei. Infatti, come è mostrato in III.16, non esiste alcun multiplo di un angolo di contingenza (porzione di piano compresa fra la circonferenza e la tangente alla circonferenza in un punto) che supera un angolo rettilineo.

Assai più articolata è la Def. V.5 che introduce la nozione di avere lo stesso rapporto e indirettamente di proporzione. In linguaggio simbolico, essa stabilisce che quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione se, quando si moltiplicano A e C per un *qualunque* intero m e B e D per un qualunque intero n, si ha per ogni scelta di m e n:

i) $mA < nB$ implica $mC < nD$;
ii) $mA = nB$ implica $mC = nD$;
iii) $mA > nB$ implica $mC > nD$.

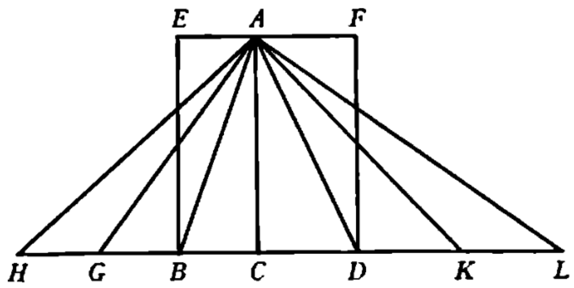
PROPOSIZIONI

PROPOSIZIONE I.

Triangoli e parallelogrammi che abbiano la stessa altezza [a] *stanno fra loro come le basi.*

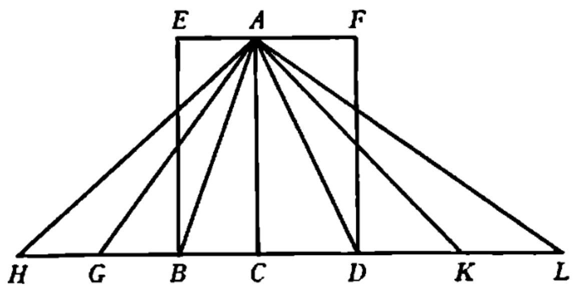
Siano ABC, ACD [due] triangoli, ed $EACB$, $CAFD$ [due] parallelogrammi, aventi la stessa altezza AC [b]; dico che la base BC sta alla base CD come il triangolo ABC sta al triangolo ACD e come il parallelogrammo $EACB$ sta al parallelogrammo $CAFD$.

Infatti, prolungata da ambedue le parti la retta BD sino ai punti H, L, si pongano così quantesivoglia rette BG, GH uguali alla base BC, e quantesivoglia rette DK, KL



uguali alla base CD, e si traccino [infine] le congiungenti AG, AH, AK, AL.

Ora, poiché CB, BG, GH sono uguali fra loro, anche i triangoli ABC, AGB, AHG sono uguali fra loro (I, 38). Quindi, la base HC è tante volte multipla della base BC quante volte è anche multiplo il triangolo AHC del triangolo ABC. Per la stessa ragione, la base CL è tante volte multipla della base CD quante volte è anche multiplo il triangolo ALC del triangolo ACD; e se la base HC è poi uguale alla base CL, pure il triangolo AHC è uguale al triangolo ACL (I, 38), se la base HC è maggiore della base CL, pure il triangolo AHC è maggiore del triangolo ACL, e se la base HC è minore, anche il triangolo AHC è minore. Date così quattro grandezze, le due basi BC, CD ed i due triangoli ABC, ACD, si sono prese altre grandezze equimultiple [qualunque] della base BC e del triangolo ABC, cioè la base HC ed il triangolo AHC, e ancora altre grandezze equimultiple qualunque della base CD e del triangolo ACD, cioè la base CL ed il triangolo ACL; ed è stato dimostrato che, se la base HC supera la base CL, anche il triangolo AHC supera il triangolo ALC, se HC è uguale a CL, corrispondentemente AHC è uguale ad ALC, e se HC è minore, AHC è minore; perciò la base BC sta alla base CD come il triangolo ABC sta al triangolo ACD (V, def. V).



Pappo e il “dominio della analisi”

PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuerſæ, & Commentarijs
Illuſtratæ.
VENETIIS,
Apud Franciſcum de Franciſcis Senenſem.
M. D. LXXXIX.

Il VII LIbro della Collezione di Pappo si apre con un oscuro discorso intorno ai metodi dell’analisi e della sintesi:
L’analisi è il passaggio dalla cosa cercata, considerata come se fosse ammessa, attraverso ciò che segue in ordine da essa, alla cosa ammessa.

La matematica nel Seicento: generalità

Già a partire dal Cinquecento la matematica in Europa conosce un importante sviluppo. Eccone, per sommi capi, i principali fattori e le principali caratteristiche:

- Riscoperta del *corpus* matematico antico: oltre ad Euclide e ad Archimede (i cui testi già circolarono e furono tradotti nel corso del Medioevo), si diffondono le opere di matematici come: Apollonio, Tolomeo, Pappo ed Erone.
- Tradizione della matematica abachistica: la tradizione risale a Leonardo Pisano XII-XIII secolo e ha il suo centro nelle cosiddette scuole d'abaco dove si formarono mercanti, architetti, ingegneri e in generale tutti coloro che non erano avviati alle professioni liberali (legge, medicina, ecc.)
- L'invenzione della stampa a caratteri mobili (1453-55), d'altro canto, favorisce una diffusione dei testi che prima di allora era sconosciuta.

Importanti trasformazioni...

Figure: François Viète 1540-1603

- Nell'opera di Viète il recupero delle fonti antiche e la tradizione algebrico-abachistica si fondono aprendo la strada allo sviluppo dell'algebra simbolica e alla geometria analitica.
- Introduzione di una convenzione semplice ma rivoluzionaria: le grandezze incognite sono indicate con le vocali e quelle note o date con le consonanti (notare lo scambio rispetto alla pratica odierna).

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des probleſmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

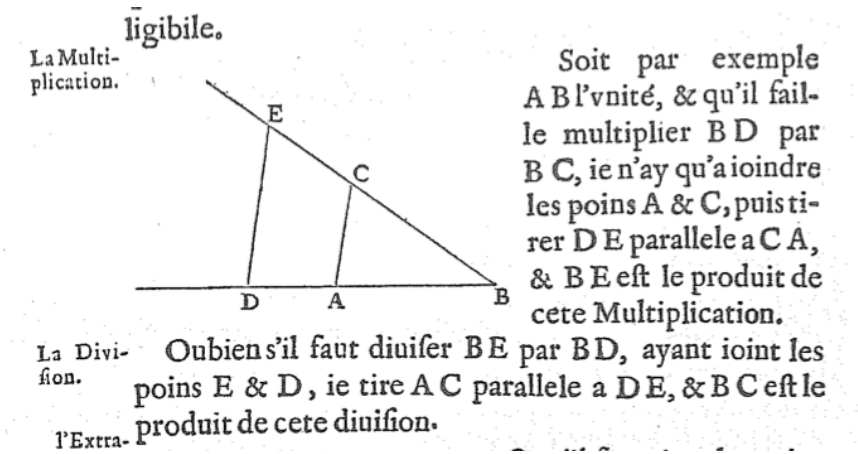
Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité eſt

Commēt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

P p

Le principali innovazioni introdotte da Cartesio sono:

- L'idea secondo la quale l'algebra può essere impiegata come ausilio per analizzare problemi di costruzione geometrica.
- Abolizione del principio di omogeneità: segmenti di linea retta possono essere moltiplicati e divisi per ottenere nuovi segmenti.
- Introduzione della curva-equazione.


ligibile.

La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diviſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extra-

BE è il prodotto di BD e BC. Infatti per il teorema di Talete si ha: $AB : BD = BC : EB$. Ponendo $AB = 1$, ricaviamo: $EB = BD \cdot BC$.

L'idea di base della *Géométrie* è che l'algebra può essere impiegata come ausilio per analizzare problemi di costruzione geometrica. Di più, Cartesio enuncia un metodo generale che consiste dei seguenti passi:

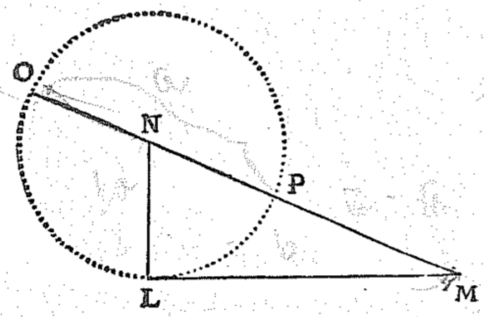
- Tracciare un diagramma nel quale sono rappresentati i dati del problema e la soluzione (supposta nota).
- Attribuire dei nomi ai segmenti coinvolti (lettere: $a, b, x, z, \ldots$).
- Tradurre il problema in una o più equazioni.
- Risolvere le equazioni o la equazione.
- Tradurre l'espressione algebrica della soluzione in una serie di operazioni geometriche che producono il segmento richiesto.

L'ultimo passo del metodo esposto da Cartesio presuppone l'impiego della sintesi (geometrica) per produrre costruzioni che conducano ai segmenti di linea richiesti. Vediamo un esempio: $z^2 = az + b^2$

And if it can be solved by ordinary geometry, that is, by the use of straight lines and circles traced on a plane surface,[19] when the last equation shall have been entirely solved there will remain at most only the square of an unknown quantity, equal to the product of its root by some known quantity, increased or diminished by some other quantity also known.[20] Then this root or unknown line can easily be found. For example, if I have $z^2 = az + b^2$,[21] I construct a right triangle NLM with one side LM, equal to b, the square root of the known quantity b^2, and the other side, LN, equal to $\frac{1}{2}a$, that is, to half the other known quantity which was multiplied by z, which I supposed to be the unknown line. Then prolonging MN, the hypotenuse[22] of this triangle, to O, so that NO is equal to NL, the whole line OM is the required line z. This is expressed in the following way:[23]

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

Vogliamo costruire geometricamente “la soluzione” di $z^2 = az + b^2$. Si costruisce il triangolo rettangolo $\triangle NLM$ i cui cateti LM e LN sono rispettivamente b e $1/2a$. Prolunghiamo l'ipotenusa MN di un segmento ON, uguale a $1/2a$. Il segmento OM è la lunghezza cercata.



$z^2 \infty\, a z + b b$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue $b b$, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2} a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle, Volendo dunque risolvere un problema, si deve innanzitutto considerarlo come già risolto, e attribuire dei nomi a tutte le linee che si reputano ecessarie per costruirlo, sia a quelle incognite sia alle altre. Poi, senza fare alcuna differenza fra linee note ed incognite, si deve affrontare la difficoltà secondo quell'ordine che più naturalmente di tutti mostra come esse dipendono mutualmente le une dalle altre, finché non si sia trovato il mezzo per esprimere una stessa quantità in due maniere: e questo è ciò che si chiama un'equazione, poiché i termini di una di queste due maniere sono uguali a quelli dell'altra. E si devono ricavare tante equazioni di questo tipo quante sono le linee supposte come incognite. Oppure, se non se ne ottengono altrettante e nonostante ciò non si è trascurata nessuna delle condizioni richieste dal problema, ciò significa che il problema non è interamente determinato. E in tal caso si possono prendere a piacere linee note per tutte le incognite alle quali non corrisponde nessuna equazione. (Descartes, 1637, p. 298-299)

La questione, dunque, la soluzione della quale fu avviata da Euclide e portata avanti da Apollonio, ma non completata da alcuno è la seguente:
Avendo tre, quattro o più linee date in posizione, si richiede di trovare un punto dal quale possono essere tracciate altrettante linee, ciascuna delle quali forma un angolo assegnato con le linee date, in maniera tale che il rettangolo di due linee tracciate abbia un rapporto dato con il quadrato della terza (se ci sono solo tre linee); o con il rettangolo delle altre due (se ce ne sono quattro), o di nuovo in maniera tale che il parallelepipedo costruito sopra tre delle linee tracciate abbia un rapporto dato con con quello tracciato su le rimanenti due e un'altra linea assegnata, [...]. Il problema ammette dunque un'estensione ad un numero qualunque di linee.
(Descartes, 1637, p. 298-299)

The question, then, the solution of which was begun by Euclid and carried farther by Apollonius, but was completed by no one, is this:

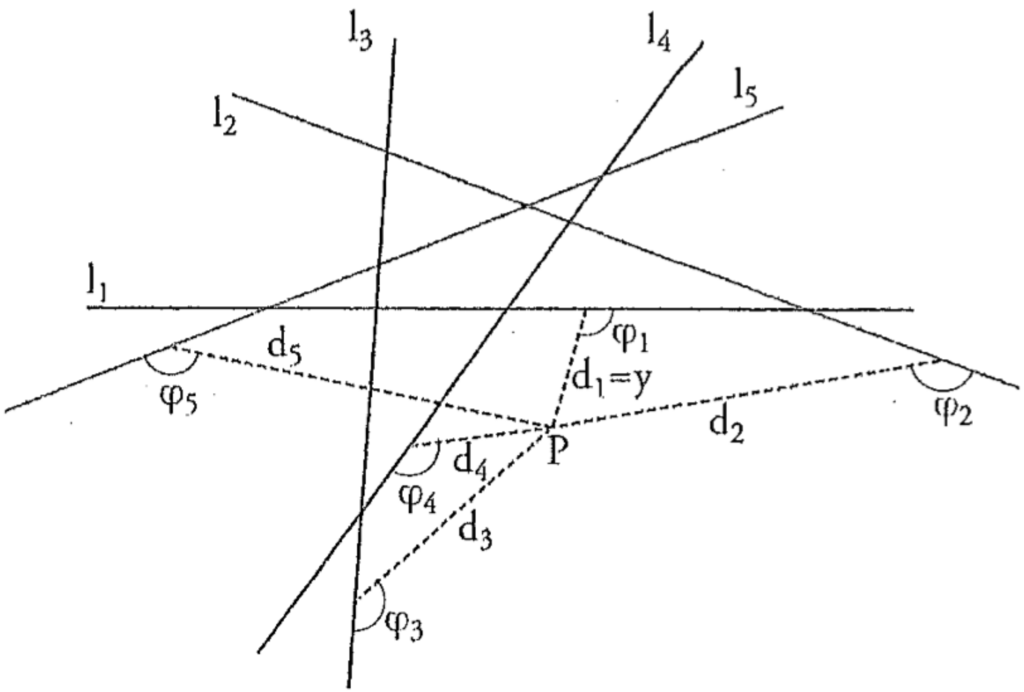
Having three, four or more lines given in position, it is first required to find a point from which as many other lines may be drawn, each making a given angle with one of the given lines, so that the rectangle of two of the lines so drawn shall bear a given ratio to the square of the third (if there be only three); or to the rectangle of the other two (if there be four), or again, that the parallelepiped[35] constructed upon three shall bear a given ratio to that upon the other two and any given line (if there be five), or to the parallelepiped upon the other three (if there be six); or (if there be seven) that the product obtained by multiplying four of them together shall bear a given ratio to the product of the other three, or (if there be eight) that the product of four of them shall bear a given ratio to the product of the other four. Thus the question admits of extension to any number of lines.

Date k rette in posizione e fissati angoli ϕ_j, $j = 1, \ldots, k$, trovare i punti P tali che:

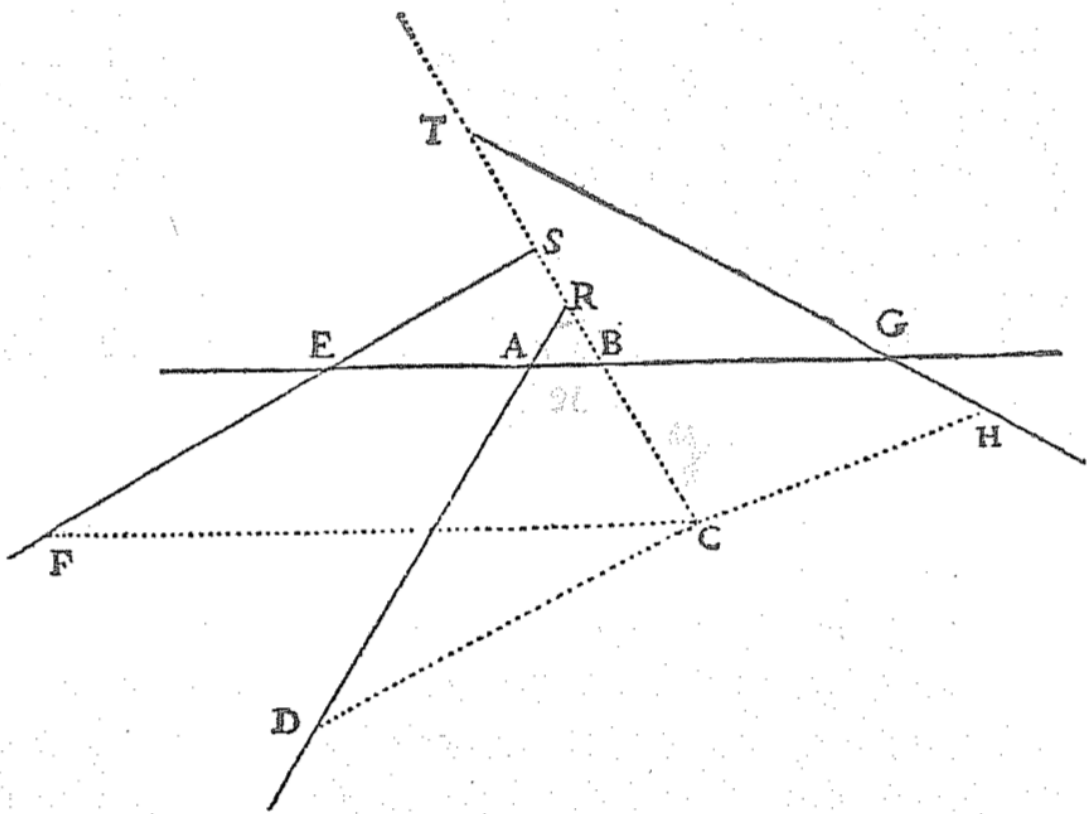
$$\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{\prod_{i=n+1}^{2n} d_i} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{se il numero } k \text{ di linee è pari}$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{a \cdot \prod_{i=n+1}^{2n-1} d_i} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{se il numero } k \text{ di linee è dispari,}$$

dove a è un segmento dato in lunghezza e $\frac{\alpha}{\beta}$ un rapporto assegnato (anche irrazionale).

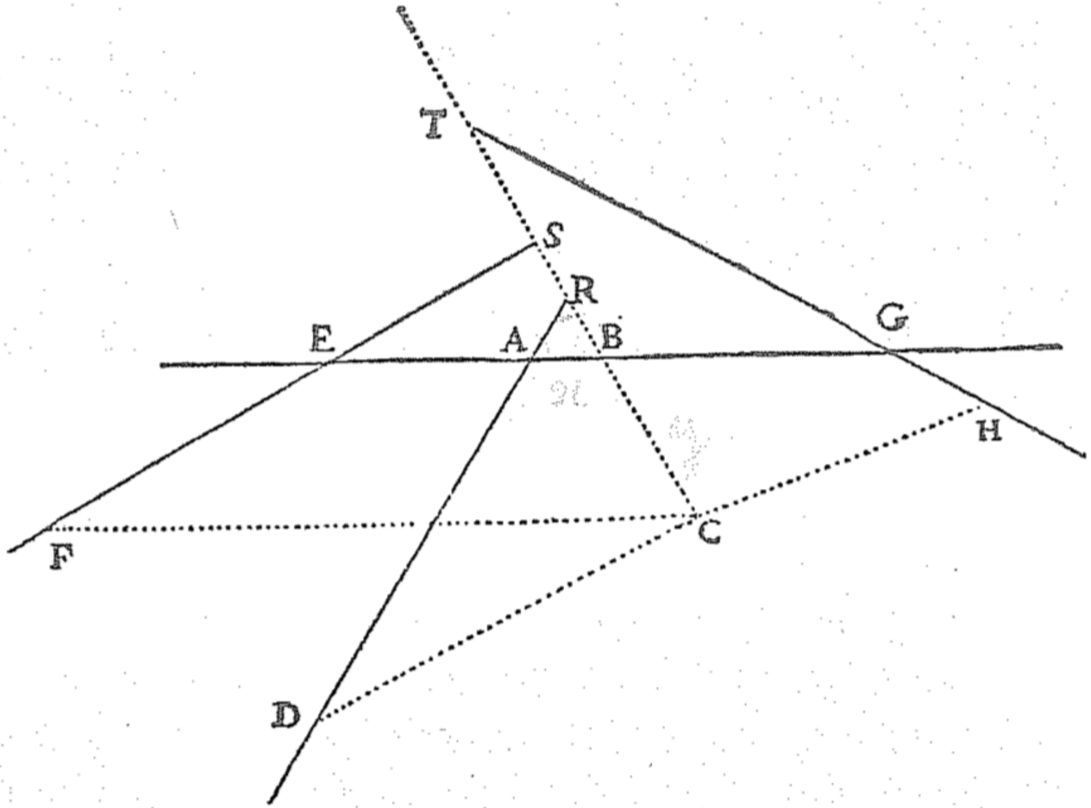


First, I suppose the thing done, and since so many lines are confusing, I may simplify matters by considering one of the given lines and one of those to be drawn (as, for example, AB and BC) as the principal lines, to which I shall try to refer all the others. Call the segment of the line AB between A and B, x, and call BC, y. Produce all the other given lines to meet these two (also produced if necessary) provided none is parallel to either of the principal lines. Thus, in the figure, the given lines cut AB in the points A, E, G, and cut BC in the points R, S, T.



$$AB = x, CB = y$$
$$CD = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}$$
$$CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}, \dots$$

dove le quantità $z, b, c, d, e, k, \dots$ sono note a partire dai dati del problema.



And thus you see that, no matter how many lines are given in position, the length of any such line through C making given angles with these lines can always be expressed by three terms, one of which consists of the unknown quantity y multiplied or divided by some known quantity; another consisting of the unknown quantity x multiplied or divided by some other known quantity; and the third consisting of a known quantity.[49] An exception must be made in the case where the given lines are parallel either to AB (when the term containing x vanishes), or to CB (when the term containing y vanishes). This case is too simple to require further explanation.[50] The signs of the terms may be either + or — in every conceivable combination.[51]

La Géométrie, 1637: il problema di Pappo

Nel caso di tre o quattro linee, la soluzione del problema di Pappo è rappresentata da una equazione del tipo:

$$y^2 = Ay + Bx + Cx^2 + Dxy,$$

dove A, B, C, D designano espressioni di quantità note (che dipendono cioè dalla posizione delle rette e dagli angoli ϕ_k).

GEOMETRY

Furthermore, to determine the point C, but one condition is needed, namely, that the product of a certain number of lines shall be equal to, or (what is quite as simple), shall bear a given ratio to the product of certain other lines. Since this condition can be expressed by a single equation in two unknown quantities,[52] we may give any value we please to either x or y and find the value of the other from this equation. It is obvious that when not more than five lines are given, the quantity x, which is not used to express the first of the lines can never be of degree higher than the second.[53]

Assigning a value to y, we have $x^2 = \pm ax \pm b^2$, and therefore x can be found with ruler and compasses, by a method already explained.[54] If then we should take successively an infinite number of different values for the line y, we should obtain an infinite number of values for the line x, and therefore an infinity of different points, such as C, by means of which the required curve could be drawn.

Or de cela seul qu'on sçait le rapport, qu'ont tous les poins d'vne ligne courbe a tous ceux d'vne ligne droite, en la façon que iay expliquée; il est aysé de trouuer aussy le rapport qu'ils ont a tous les autres poins, & lignes données: & en suite de connoistre les diametres, les aissieux, les centres, & autres lignes, ou poins, a qui chasque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier, ou plus simple, qu'aux autres: & ainsi d'imaginer diuers moyens pour les descrire, & d'en choisir les plus faciles. Et mesme on peut aussy par cela seul trouuer quasi tout cequi peut estre determiné touchant la grandeur de l'espace quelles comprenent, sans qu'il soit besoin que i'en donne plus d'ouuerture. Et enfin pour cequi est de toutes les autres proprietés qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dependent que de la grandeur des angles qu'elles font auec quelques autres lignes. Mais lorsqu'on peut tirer des lignes droites qui les couppent a angles droits, aux poins ou elles sont rencontrées par celles auec qui elles font les angles qu'on veut mesurer, ou, ceque ie prens icy pour le mesme, qui couppent leurs contingentes; la grandeur de ces angles n'est pas plus malaysée a trouuer, que s'ils estoient compris entre deux lignes droites. C'est pourquoy ie croyray auoir mis icy tout ce qui est requis pour les elemens des lignes courbes, lorsque i'auray generalement donné la façon de tirer des lignes droites, qui tombent a angles droits sur

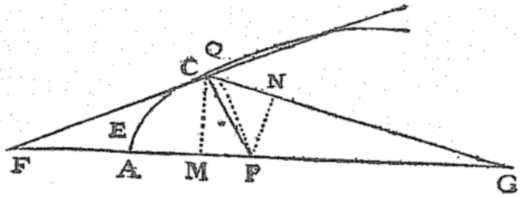
Que pour trouuer toutes les proprietes des lignes courbes, il suffit de sçauoir le rapport qu'ont tous leurs poins a ceux des lignes droites, & la facon de tirer d'autres lignes qui les couppent en tous ces poins a angles droits.

Vv 3 tels

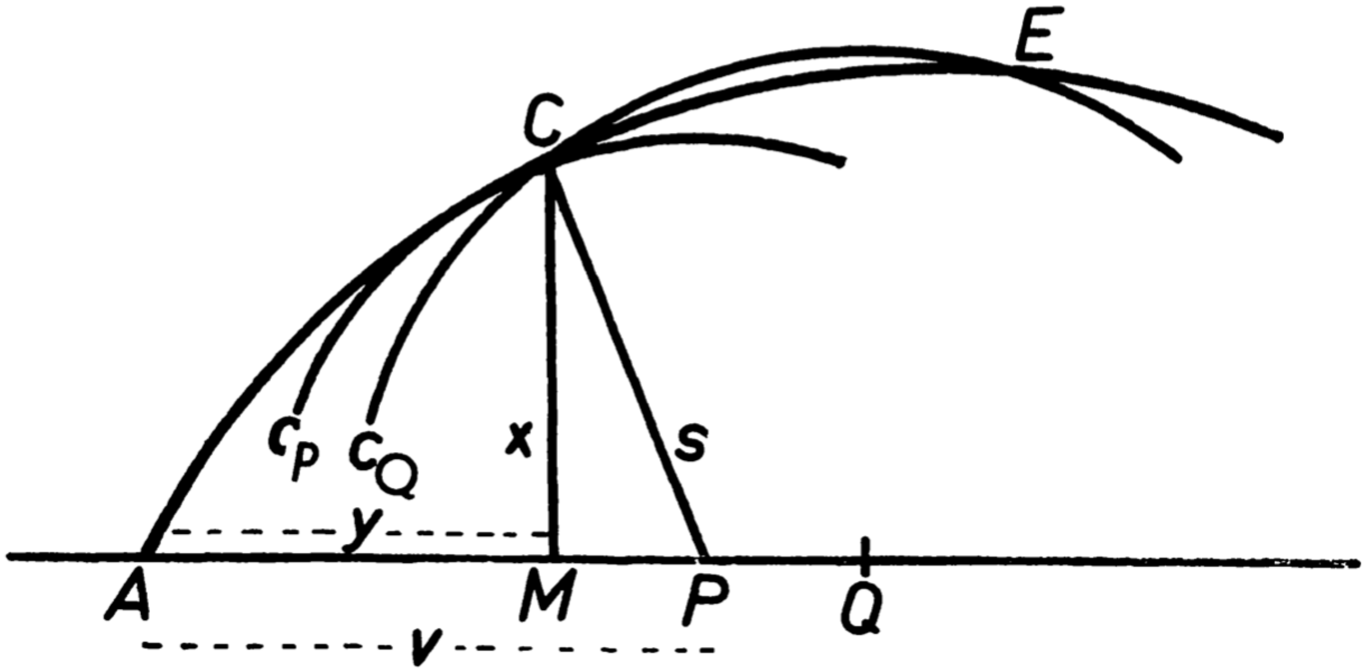
Il problema delle tangenti: Descartes, Secondo Libro della *Géométrie*

tels de leurs poins qu'on voudra choiſir. Et i'oſe dire que c'eſt cecy le probléſme le plus vtile, & le plus general non ſeulement que ie ſçache, mais meſme que i'aye iamais deſiré de ſçauoir en Geometrie.

Facon generale pour trouuer des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.



Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie ſuppoſe la choſe deſia faite, & que la ligne cherchée eſt C P, laquelle ie prolonge iuſques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie ſuppoſe eſtre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E: en ſorte que faiſant M A ou C B $\propto y$, & C M, ou B A $\propto x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui eſt entre x & y. Puis ie fais P C $\propto s$, & P A $\propto v$, ou P M $\propto v - y$, & a cauſe du triangle rectangle P M C iay ss, qui eſt le quarré de la baze eſgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui ſont les quarrés des deux coſtés. c'eſt a dire iay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oſte de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui eſt ayſé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete ſomme au lieu d'xx, & ſon cube au lieu d'x^3, & ainſi des autres, ſi c'eſt x que ie veuille oſter; oubien



La soluzione di Descartes al problema delle tangenti (in realtà della normale) fa leva sulla determinazione della circonferenza tangente alla curva ACE nel punto C. Tale circonferenza è determinata dalla condizione secondo la quale $\mathcal{C}_P$ ha una intersezione doppia con ACE.

Il problema delle tangenti: Descartes, Secondo Libro della *Géométrie*

Analiticamente, [il ruolo delle x e delle y è scambiato rispetto alla figura precedente] sia $(x - v)^2 + y^2 = r^2$ l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}_P$ di centro $P = (0, v)$. La retta cercata è tangente nel punto $C = (x_0, y_0)$ alla curva. Se la curva ha equazione $F(x, y) = 0$ (di grado arbitrario n), si elimina una delle variabili (ad esempio la y) dal sistema

$$F(x, y) = 0, \qquad (x - v)^2 + y^2 = r^2,$$

e si richiede che il polinomio così ottenuto $P(x)$ abbia una radice doppia in $x = x_0$; si richiede cioè che valga:

$$P(x) = (x - x_0)^2 R(x),$$

con $R(x)$ polinomio da determinare. Eguagliando i coefficienti dei polinomi che compaiono nei due membri si ottengono $2n + 1$ equazioni in $2n + 1$ incognite (che sono i $2n - 1$ coefficienti di $R(x)$ e i parametri v e r). Risolvendo questo sistema si ottiene la circonferenza cercata e quindi la retta normale e la retta tangente alla curva nel punto (x_0, y_0).
Esempio della parabola: $y = mx^2$.

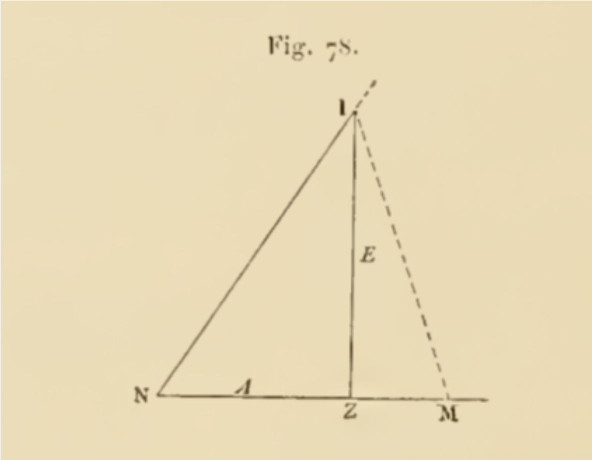
Pierre de Fermat (1601-1665)

Fermat: *Ad locos planos et solidos isagoge*, 1636 (circa)

De locis quamplurima scripsisse veteres, haud dubium: testis Pappus initio Libri septimi, qui Apollonium de locis planis, Aristaeum de solidis scripsisse asseverat. Sed aut fallimur, aut non proclivis satis ipsis fuit locorum investigatio; illud auguramur ex eo quod locos quampluirimos non satis generaliter expresserunt, ut infra patebit. Scientiam igitur hanc propriae et peculiari analysi subjicimus, ut deinceps generalis ad locos via pateat.
Quoties in ultima aequalitate duae quantitates ignotae reperiuntur, fit locus [loco] et terminus alterius ex illis describit lineam rectam aut curvam. Linea recta unica et simplex est, curvae infinitae: circulus, parabole, hyperbole, ellipsis, etc.

Non c'è dubbio che gli antichi abbiano scritto molte cose sui luoghi: ne è testimone Pappo che all'inizio del Libro 7 asseriva che Apollonio aveva scritto dei luoghi piani e Aristeo dei luoghi solidi. Ma, o ci sbagliamo, o la loro ricerca sui luoghi non fu facile per loro; lo deduciamo dal fatto per molti luoghi non hanno dato un enunciato sufficientemente generale, come apparirà chiaro più avanti. Allora sottoporremo questa scienza alla propria e peculiare analisi, in modo che di conseguenza sarà chiara una via generale per i luoghi. Ogni volta che due quantitnote si trovano in un'equazione ultima, "fit locus loco" e l'estremo di una di queste [quantità ignote] descrive una linea retta o una curva. La retta è semplice e unica, le [altre] curve [sono] infinite: cerchio, parabola, iperbole, ellisse, etc.

L'equazione della retta:
"Sia data in posizione la retta NZM, un punto N della quale sia stato fissato; sia $NZ = A$ una quantità incognita e sia ZI innalzata da Z sotto un angolo dato [non necessariamente retto] $= E$, l'altra incognita. Se $D \cdot A = B \cdot E$ [D in E aequetur B in E] il punto I starà su una retta data in posizione" (si intende che B e D siano noti).



In generale l'equazione di una retta (non passante per l'origine) è scritta da Fermat nel modo seguente:

$$Z \text{ planum } - D \text{ in } A \text{ aequetur } B \text{ in } E.$$

Fermat: il metodo dei massimi e dei minimi

I.

METHODUS

AD

DISQUIRENDAM MAXIMAM ET MINIMAM [1].

Omnis de inventione maximæ et minimæ doctrina duabus positionibus in notis innititur et hac unica præceptione :

Statuatur quilibet quæstionis terminus esse A (sive planum, sive solidum aut longitudo, prout proposito satisfieri par est) et, inventâ maximâ aut minimâ in terminis sub A, gradu $<$ aut gradibus $>$, ut libet, involutis, ponatur rursus idem qui prius terminus esse $A + E$, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis sub A et E gradibus, ut libet, coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus [2], duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia et, demptis communibus (quo peracto, homogenea omnia ex parte alterutra ab E vel ipsius gradibus afficiuntur), applicentur omnia ad E vel ad elationem ipsius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis,

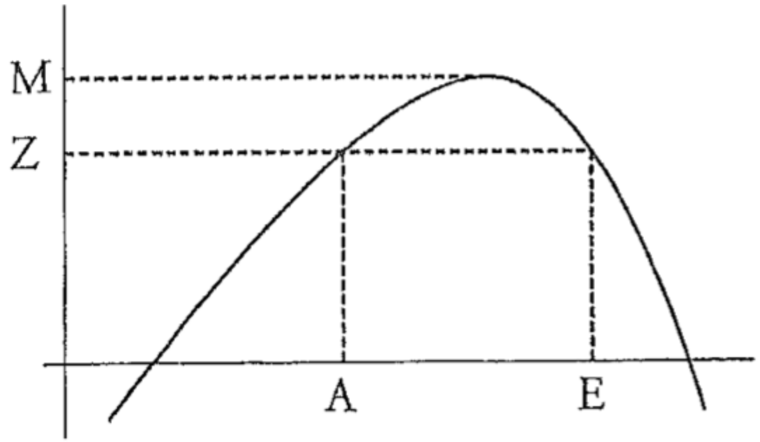
Fermat: il metodo dei massimi e dei minimi

Consideriamo una grandezza variabile che possiamo descrivere (anacronisticamente) come una funzione f. Vogliamo determinare il massimo M. Se consideriamo un valore $Z < M$, l'equazione $f(X) = Z$ ha due soluzioni, $X = A$ e $X = E$. Si ha dunque: $f(A) = f(E)$ e quindi anche:

$$\frac{f(A) - f(E)}{A - E} = 0.$$

Se incrementiamo il valore di Z sempre più, ma in maniera che risulti sempre $Z < M$, i punti A e E saranno sempre più vicini. Quindi se nell'equazione precedente, dopo avere svolto la semplificazione poniamo $E = A$, otteniamo il punto di massimo A e quindi il valore massimo M di f:

$$\left.\frac{f(A) - f(E)}{A - E}\right|_{A=E} = 0.$$



Supponiamo di voler trovare tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato $2B$ quelli che hanno area massima. Dobbiamo trovare il massimo della "funzione" $f(A) = (B - A)A$ dove A designa l'incognita base del rettangolo. Con il metodo precedente si ha:

$$f(A) - f(E) = B(A - E) - (A^2 - E^2) = 0,$$

dividendo per $A - E$ e ponendo quindi $A = E$, si ricava:

$$B - 2A = 0, \text{ cioè: } A = B/2.$$

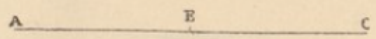
Fermat: il metodo dei massimi e dei minimi (variante)

134 ŒUVRES DE FERMAT. — Ire PARTIE.

affectione sub E omnino liberetur. Elidantur deinde utrimque homogenea sub E aut < sub > ipsius gradibus quomodolibet involuta, et reliqua æquentur, aut, si ex una parte nihil superest, æquentur sane, quod eodem recidit, negata affirmatis. Resolutio ultimæ istius æqualitatis dabit valorem A, quâ cognitâ, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet.

Exemplum subjicimus : *Sit recta* AC (*fig.* 91) *ita dividenda in* E *ut rectangulum* AEC *sit maximum*.

Fig. 91.



Recta AC dicatur B. Ponatur pars altera ipsius B esse A : ergo reliqua erit $B - A$, et rectangulum sub segmentis erit B in $A - Aq.$, quod debet inveniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius B esse $A + E$: ergo reliqua erit $B - A - E$, et rectangulum sub segmentis erit

$$B \text{ in } A - Aq. + B \text{ in } E - A \text{ in } E \text{ bis} - Eq.,$$

quod debet adæquari superiori rectangulo

$$B \text{ in } A - Aq.$$

Demptis communibus,

$$B \text{ in } E \quad \text{adæquabitur} \quad A \text{ in } E \text{ bis} + Eq.,$$

et, omnibus per E divisis,

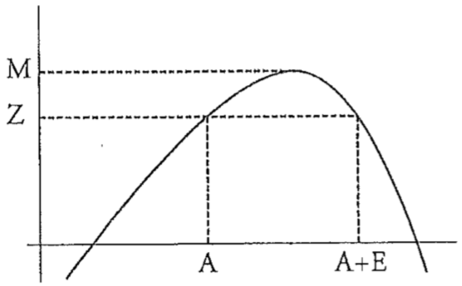
$$B \quad \text{adæquabitur} \quad A \text{ bis} + E.$$

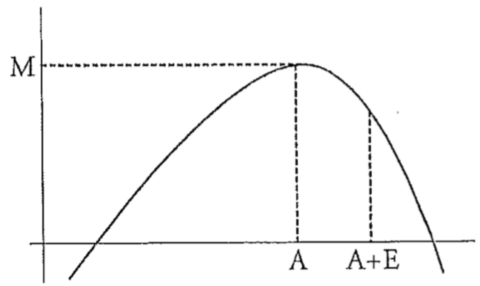
Elidatur E,

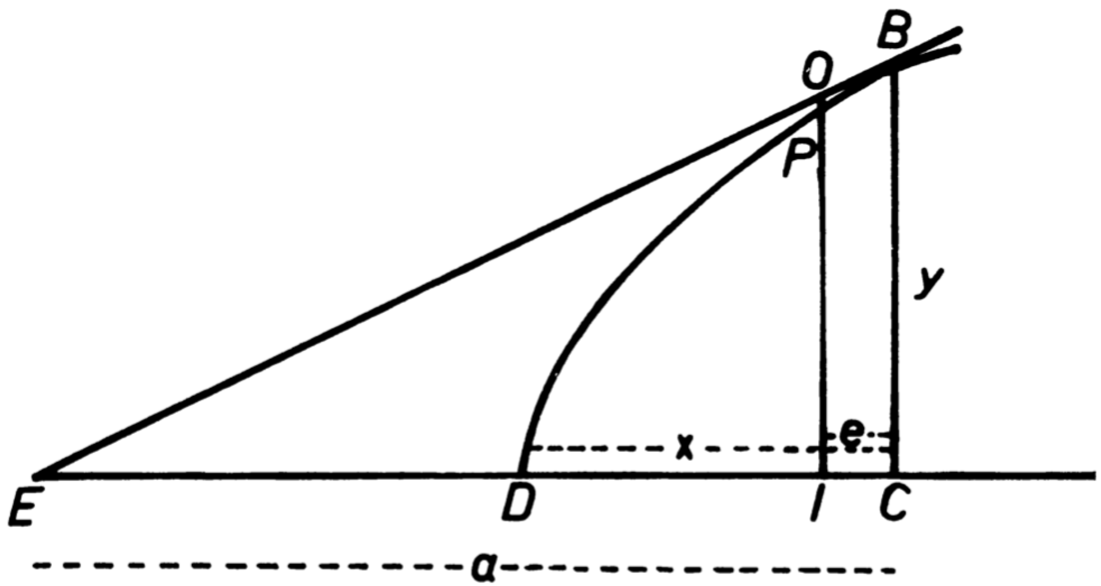
$$B \quad \text{æquabitur} \quad A \text{ bis}.$$

Igitur B bifariam est dividenda ad solutionem propositi; nec potest generalior dari methodus.

Una piccola variante: supponiamo sempre di voler trovare, tra tutti i rettangoli di perimetro dato, quello che ha area massima. Se chiamiamo $2B$ il perimetro, e X la base del rettangolo, l'altezza sarà $B - X$, e l'area del rettangolo $(B - X)X = BX - X^2$ Si tratta allora di trovare il massimo della funzione $f(X) = BX - X^2$ Seguiamo il metodo precedente ma indichiamo con A e $A + E$ le due soluzioni della equazione $f(X) = Z$; avremo $f(A + E) - f(A) = 0$ (adaequatio), cioè $BE - E^2 - 2AE \approx 0$. Dividiamo ora per E e poniamo $E = 0$. Avremo $B - 2A = 0$. Apparentemente questa variante non rappresenta un'innovazione significativa. Tuttavia non è così: "[...] mentre nel primo metodo A ed E erano ambedue allo stesso tempo variabili e incognite, nel secondo le due caratteristiche si spezzano: A diventa fin dall'inizio la posizione, incognita ma non variabile, del punto di massimo". Come conseguenza di ciò l'equazione $f(A) = f(E)$ diventa l'equazione approssimata (adaequatio) $f(A) = f(A + E)$







Dalla disuguaglianza $IO > IP$ e dalla proprietà della parabola ($DC : DI = CB^2 : IP^2$) si ha:

$$DC : DI > CB^2 : IO^2.$$

Dalla similitudine dei triangoli EIO e ECB si ha $CB^2 : IO^2 = EC^2 : EI^2$ e quindi:

$$DC : DI > EC^2 : EI^2.$$

Ponendo $DC = x$ (che è data, poiché B è dato) e $EC = a$ (la quantità incognita) e $IC = e$ ricaviamo:

$$x : (x - e) > a^2 : (a - e)^2$$

A questo punto Fermat sostituisce

$x : (x - e) > a^2 : (a - e)^2$ o equivalentemente $xa^2 + xe^2 - 2xae > xa^2 - a^2e$

con l'adequazione

$$xa^2 + xe^2 - 2xae \approx xa^2 - a^2e$$

Usando la procedura descritta sopra (cancellazione dei termini uguali, divisione per e, condizione $e = 0$) si ricava $a = 2x$. Notiamo che Fermat tratta il punto O come se appartenesse alla parabola.

Alcune lettere

Lettera di Fermat a Roberval e a Étienne Pascal, Agosto 1636

8. J'ai trouvé beaucoup d'autres propositions géométriques, comme la restitution de toutes les propositions *de locis planis* (¹) et autres; mais ce que j'estime plus que tout le reste est une méthode pour déterminer toutes sortes de problèmes plans ou solides, par le moyen de laquelle je trouve l'invention (²) *maximæ et minimæ in omnibus omnino problematibus*, et ce, par une équation aussi simple et aisée que celles de l'Analyse ordinaire.

Nel 1638, il trattatello di Fermat giunge a conoscenza di Cartesio, il quale fu inizialmente molto critico "semperque fallit ista methodus".

XXV.

DESCARTES A MERSENNE (¹).

< LUNDI 18 JANVIER 1638 >

(D, III, 56.)

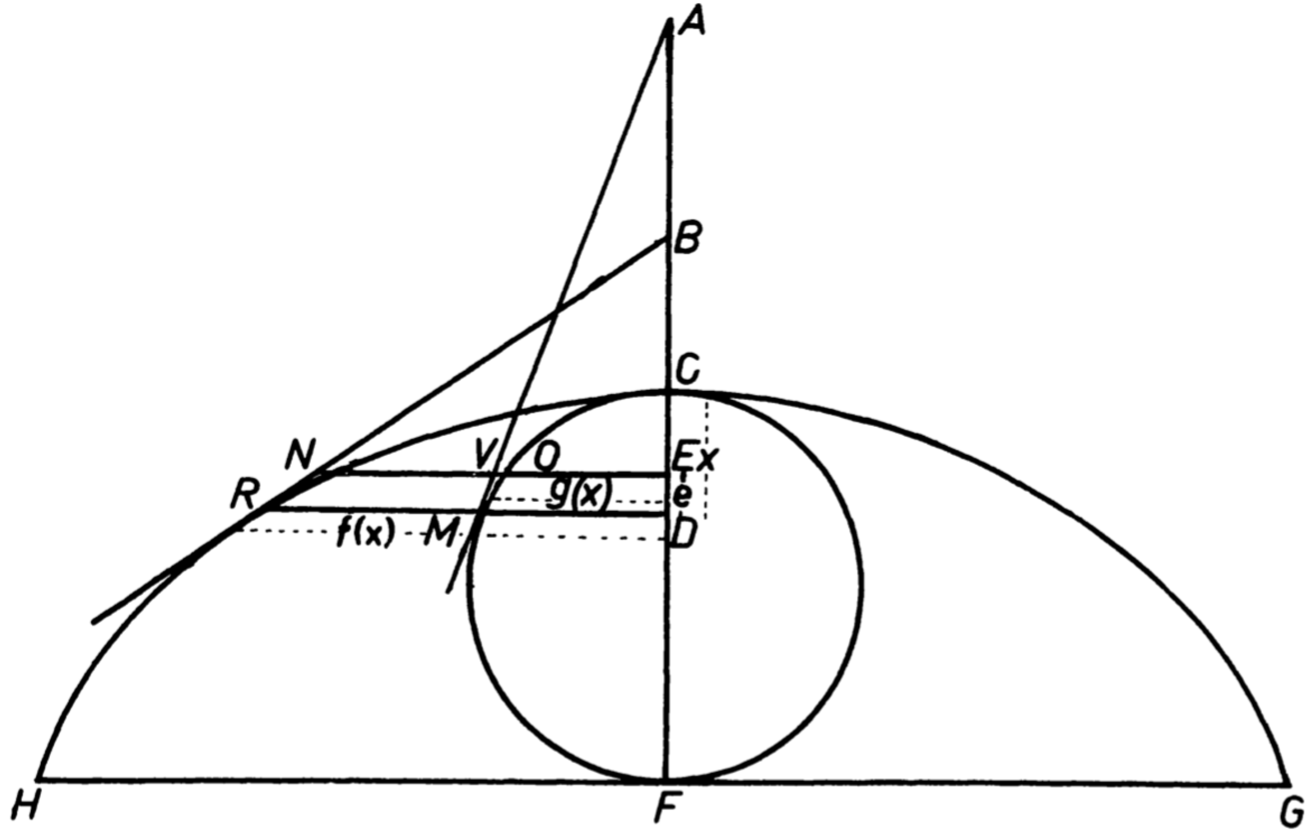
MON RÉVÉREND PÈRE,

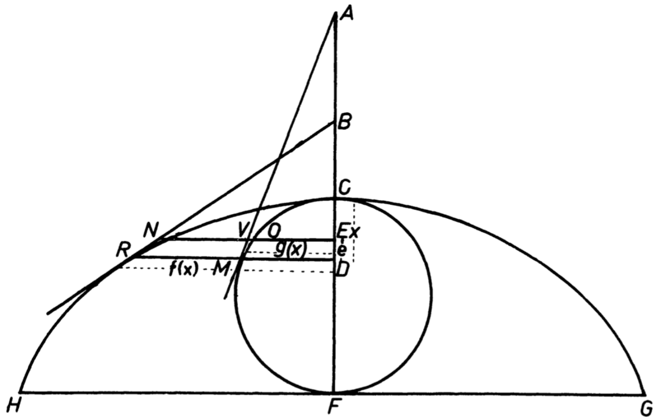
1. Je serois bien aise de ne rien dire de l'Écrit que vous m'avez envoyé (²), pource que je n'en saurois dire aucune chose qui soit à l'avantage de celui qui l'a composé. Mais à cause que je reconnois que c'est celui même qui avoit ci-devant tâché de réfuter ma Dioptrique,

In questa memoria Fermat determina la tangente di quattro curve notevoli: la cissoide, la concoide, la quadratrice e la cicloide.

> *Consideramus nempe in plano cujuslibet curvae rectas duas positione datas, quarum altera diameter, si libeat, altera applicata nuncupetur. Deinde, jam inventam tangentem supponentes ad datum in punctum, proprietatem specificam curvae, non in curva amplius, sed in invenienda tangente, per adaequalitatem consideramus et, elisis (quae monet doctrina de maxima et minima) homogeneis, fit demum aequalitas quae punctum concursus tangentis cum diametro determinat, ideoque ipsam tangentem.*
>
> *Consideriamo nel piano in cui giace una curva qualunque, due rette date in posizione, della quali una si chiamerà, se si vuole, il diametro e l'altra l'applicata. Supponiamo che sia stata determinata la tangente alla curva in un suo punto e consideriamo la proprietà specifica della curva non sulla curva ma sulla tangente e, dopo aver eliminato le quantità omogenee (come insegna il metodo dei massimi e minimi), alla fine troviamo un'equazione che determina il punto di intersezione tra la tangente e il diametro, e quindi possiamo determinare la tangente vera e propria.*

Doctrina Tangentium di Fermat, 1640 circa. Opere, I, p. 158



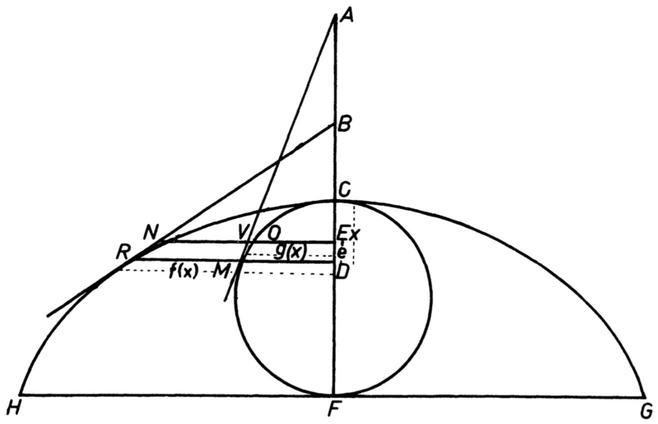


Posizioni: $AM = d, AD = b, BD = a$ (incognita, sottotangente della cicloide). Per la definizione di cicloide si ha: $f(x) = RM + MD = \text{arc}CM + g(x)$. In primo luogo si ha che (attribuendo a N, punto di intersezione della tangente RB con la parallela NE all'asse, le medesime proprietà che valgono sulla cicloide):

$NE = \dfrac{f(x)(a-e)}{a} \approx f(x-e)$, con

$$f(x-e) = \text{arc}CO + g(x-e) = \text{arc}CM - \text{arc}OM + g(x-e).$$

Similmente, $g(x-e) \approx EV = \dfrac{g(x)(b-e)}{b}$. A partire dal principio in base al quale tratti di curva possono essere sostituiti con tratti di retta tangente, abbiamo anche: $\text{arc}OM \approx MV = \dfrac{de}{b}$



Posizioni: $AM = d$, $AD = b$, $BD = a$ (incognita, sottotangente della cicloide)
Quindi abbiamo:

$$f(x-e) \approx \text{arc}CM - \frac{de}{b} + \frac{g(x)(b-e)}{b}.$$

In conseguenza di $f(x) = RM + MD = \text{arc}CM + g(x)$ e di $NE = \dfrac{f(x)(a-e)}{a} \approx f(x-e)$, abbiamo:

$$NE = \frac{(\text{arc}CM + g(x))(a-e)}{a} \approx \text{arc}CM - \frac{de}{b} + \frac{g(x)(b-e)}{b}$$

Se cancello i termini uguali e divido per e (qui porre $e = 0$ è superfluo), ottengo:

$$\frac{\text{arc}CM + g(x)}{a} = \frac{d + g(x)}{b} = \frac{f(x)}{a}.$$

La condizione si traduce geometricamente in $RB \parallel MC$.

LECTIONES Geometricæ:

In quibus (præſertìm)

GENERALIA *Curvarum Linearum* SYMPTOMATA *DECLARANTUR.*

Auctore ISAACO BARROW, Collegii SS. *Trinitatis* in Acad. *Cantab.* Socio, & *Societatis Regiæ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται· οἵτε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν. Plato de Repub. VII.

LONDINI,
Typis *Gulielmi Godbid*, & proſtant venales apud *Johannem Dunmore*, *M. DC.LXX.*

Ità Propoſiti noſtri priore (quam innuebamus) parte quomodocunque defuncti ſumus. Cui ſupplendæ, appendiculæ inſtar, ſubnectemus à nobis uſitatum methodum ex Calculo tangentes reperiendi. Quanquam haud ſcio, poſt tot ejuſmodi pervulgatas atque protritas methodos, an id ex uſu ſit facere. Facio ſaltem ex Amici conſilio; eóque libentiùs, quòd præ cæteris, quas tractavi, compendioſa videtur, ac generalis. In hunc procedo modum.

We have now finished in some fashion the first part, as we declared, of our subject. Supplementary to this we add, in the form of appendices, a method for finding tangents by calculation frequently used by us (*a nobis usitatum*). Although I hardly know, after so many well-known and well-worn methods of the kind above, whether there is any advantage in doing so. Yet I do so on the *advice of a friend*; and all the more willingly, because it seems to be more profitable and general than those which I have discussed.*

Sint A P, P M positione datæ rectæ lineæ (quarum P M propositam curvam secet in M) & M T curvam tangere ponatur ad M, rectam

rectam A P secare ad T; ut ipsius jam rectæ P T quantitatem exquiram; curvæ arcum M N indefinitè parvum statuo; tum duco rectas N Q ad M P, & N R ad A P parallelas; nomino M P = *m*; P T = *t*; M R = *a*; N R = *e*; reliquásque rectas, ex speciali curvæ natura determinatas, utiles proposito, nominibus designo; ipsas autem M R, N R (& mediantibus illis ipsas M P, P T) per *æquationem* è Calculo deprehensam inter se comparo; regulas interim has observans. 1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum *a*, vel *e* potestas habetur, vel in quibus ipsæ ducuntur in se (etenim isti termini nihil valebunt). Fig. 115.

2. Post *æquationem constitutam*, omnes abjicio terminos, literis constantes quantitates notas, seu determinatas designantibus; aut in quibus non habentur *a*, vel *e*. (etenim illi termini semper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro *a* ipsam *m*; (vel M P) pro *e* ipsam *t* (vel *P T*) substituo. Hinc demùm ipsius P T quantitas dignoscetur.

Quòd si calculum ingrediatur curvæ cujuspiam indefinita particula; substituatur ejus loco tangentis particula ritè sumpta; vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è subnexis Exemplis clariùs elucescent.

120 *BARROW'S GEOMETRICAL LECTURES*

Let AP, PM be two straight lines given in position, of which PM cuts a given curve in M, and let MT be supposed to touch the curve at M, and to cut the straight line at T.

In order to find the quantity of the straight line PT,* I set off an indefinitely small arc, MN, of the curve; then I draw NQ, NR parallel to MP, AP; I call MP = m, PT = t, MR = a, NR = e, and other straight lines, determined by the special nature of the curve, useful for the matter in hand, I also designate by name; also I compare MR, NR (and through them, MP, PT) with one another by means of an equation obtained by calculation; meantime observing the following rules.

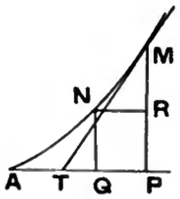


Fig. 115.

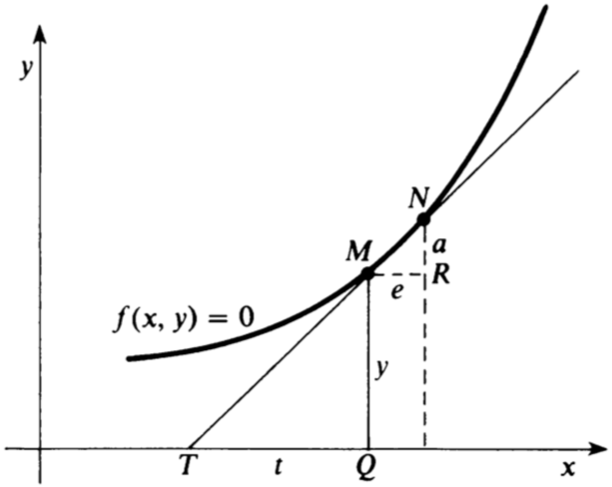
RULE 1. In the calculation, I omit all terms containing a power of a or e, or products of these (for these terms have no value).

RULE 2. After the equation has been formed, I reject all terms consisting of letters denoting known or determined quantities, or terms which do not contain a or e (for these terms, brought over to one side of the equation, will always be equal to zero).

RULE 3. I substitute m (or MP) for a, and t (or PT) for e. Hence at length the quantity of PT is found.

Moreover, if any indefinitely small arc of the curve enters the calculation, an indefinitely small part of the tangei is or of any straight line equivalent to it (on account of tl

* See note at the end of this lecture.



MN è un arco "indefinitamente piccolo" della curva $F(x, y) = 0$. Siano $M = (x, y)$ e $N = (x + e, y + a)$ le coordinate degli estremi. Si avrà $F(x, y) = F(x + e, y + a) = 0$. "Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum a, vel e potestas habetur, vel in quibus ipsae ducuntur in se (etenim isti termini nihil valebunt)". Eliminazione dei termini che contengono potenze di a ed e maggiori di due, o loro prodotti. Cancellazione dei termini che contengono "quantità note o determinate". Considerazione della similitudine fra i triangoli TQM e MRN per ricavare l'inclinazione della retta tangente.
ESEMPIO:Il *folium* di Descartes ha equazione: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

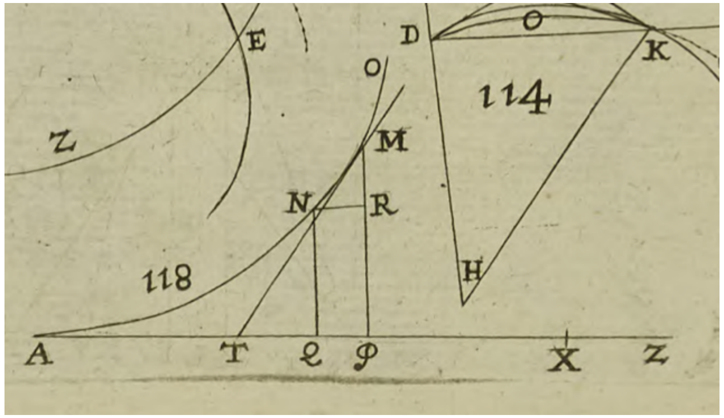
$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (Impiego una notazione moderna, Barrow rispetta rigorosamente la legge di omogeneità). Si avrà: $F(x + e, y + a) = F(x, y)$. Applicando le regole 1 e 2: $3x^2e + 3y^2a - 3xa - 3ye = 0$ da cui si ottiene il rapporto e/a e quindi per similitudine dei triangoli la determinazione della sottotangente TQ (il riferimento è alla figura della slide precedente; la figura qui riportata è tratta dalle *Lectiones*).

$$t = \frac{ey}{a} = \frac{y^2 - x}{y - x^2} y.$$

Fig. 118.
La Galande

Poſitione data ſit recta AZ, & AX magnitudine; ſit etiam *curva* AMO talis, ut ductâ utcunque rectâ MP ad AZ normali, ſit AP *cub.* + PM *cub.* = AX × AP × PM.

Dicantur AX = *b*; & AP = *f*; ergò AQ = *f* — *e*; & AQ *cub.* = *f*³ — 3 *ffe*; & QN *cub.* = *m*³ — 3 *mma*. & AQ × QN = *fm* — *fa* — *me* + *ae* = *fm* — *fa* — *me*; unde AX × AQ × QN = *bfm* — *bfa* — *bme*; hinc æquatio *f* — 3 *ffe* + *m*³ — 3 *mma* = *bfm* — *bfa* — *bme*; ſeu amoliendo rejectanea



11. Let ZGE be any curve of which the axis is AD; and let ordinates applied to this axis, AZ, PG, DE, continually

* Only proved for a special case in Lect. VI, § 17; but the method can be generalized without difficulty.

LECTURE X 117

increase from the initial ordinate AZ; also let AIF be a line such that, if any straight line EDF is drawn perpendicular to AD, cutting the curves in the points E, F, and AD in D, the rectangle contained by DF and a given length R is equal to the intercepted space ADEZ; also let DE : DF = R : DT, and join DT. Then TF will touch the curve AIF.

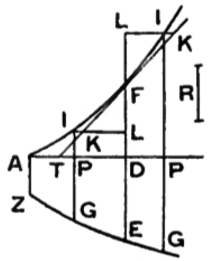


Fig. 109.

For, if any point I is taken in the line AIF (first on the side of F towards A), and if through it IG is drawn parallel to AZ, and KL is parallel to AD, cutting the given lines as shown in the figure; then LF : LK = DF : DT = DE : R, or R . LF = LK . DE.

But, from the stated nature of the lines DF, PK, we have R . LF = area PDEG; therefore LK . DE = area PDEG < DP . DE; hence LK < DP < LI.

Again, if the point I is taken on the other side of F, and the same construction is made as before, plainly it can be shown that LK > DP > LI.

Parafrasi (selvaggia) in termini moderni: sia $y = f(x)$ la funzione crescente che descrive la curva ZEG (si noti che l'asse delle y deve essere pensato diretto verso il basso). La curva AIL è descritta in termini della funzione $z = z(x)$ così definita. Posto $AD = x$ (A è l'origine del riferimento) e detta R una quantità data in *magnitudine*,

$$z(x) \cdot R = \text{Area}(AZED) = A(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Tesi: Posto $TD := \dfrac{z(x) \cdot R}{f(x)}$, si ha che TD è la sottotangente a $z(x)$ in x. Vale cioè:

$$\frac{z(x)}{z'(x)} = \frac{z(x) \cdot R}{f(x)}$$

e quindi:

$$R \cdot z'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = f(x)$$

LECTURE XI 135

19. Again, let AMB be a curve of which the axis is AD and let BD be perpendicular to AD; also let KZL be another line such that, when any point M is taken in the curve AB, and through it are drawn MT a tangent to the curve AB, and MFZ parallel to DB, cutting KZ in Z and AD in F, and R is a line of given length, TF : FM = R : FZ. Then the space ADLK is equal to the rectangle contained by R and DB.*

For, if DH = R and the rectangle BDHI is completed, and MN is taken to be an indefinitely small arc of the curve AB, and MEX, NOS are drawn parallel to AD; then we have

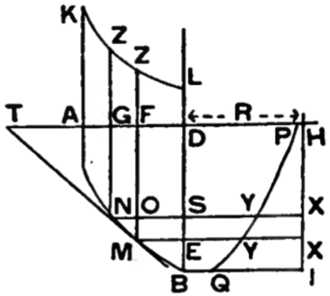


Fig. 127.

NO : MO = TF : FM = R : FZ;

∴ NO . FZ = MO . R, and FG . FZ = ES . EX.

Hence, since the sum of such rectangles as FG . FZ differs only in the least degree from the space ADLK, and the rectangles ES . EX form the rectangle DHIB, the theorem is quite obvious.

Parafrasi (selvaggia) in termini moderni: sia $y = f(x)$ la funzione che descrive la curva AMB. La curva KZL è descritta in termini della funzione $z = z(x)$ così definita. Posto $AF = x$, detta R una quantità data in *magnitudine* e indicata con TM la retta tangente a AMB in M:

$$z(x) = R \cdot \frac{FM}{TF} = \frac{R \cdot y(x) \cdot y'(x)}{y(x)}$$

Tesi:

$$\int_0^x z(t)dt = \int_0^x R \cdot y'(t)dt = R \cdot y(x).$$

Barrow and the calculus

Eyes conditioned by Newton and Leibniz recognize in the methods of quadrature and rectification presented in Lectures XI and XII the essence of the calculus viewed as a class of relations among the elements of a curve and a body of techniques for transforming those relations. Hindsight magnified by anachronistic symbolism readily translates Barrow's geometrically couched propositions into familiar forms (see Figure 122). If $y = y(x)$ denotes curve VEH, and $u = u(x)$ curve $\phi Z\psi$, then $u = y \cdot dy/dx$. Hence, $\int u\,dx = \int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$, and Proposition 1 becomes an almost trivial transformation. So too do the next two propositions, which proceed inductively toward the generally demonstrable result that $\int uy^n\,dx = \int y^{n+1}\,dy = y^{n+2}/(n+2)$. The relation $t\,dy = y\,dx$ for the curve DZO of subtangents $t = t(x)$ makes similarly short work of Proposition 10 and its corollaries.

But the conditioning is essential, enabling recognition only through hindsight, and such facile translation risks seeing in Lecture XI the outline of concepts that are not in fact present.[73] It also may relocate emphasis and rearrange the structure of Barrow's material according to later canons. Barrow evidently did not consider its propositions as constituting a distinct new form of mathematical analysis. He called no special attention to them here, nor, when Newton's method of fluxions began to make its public appearance in the early 1670s, did Barrow ever lay claim to authorship or even inspiration.

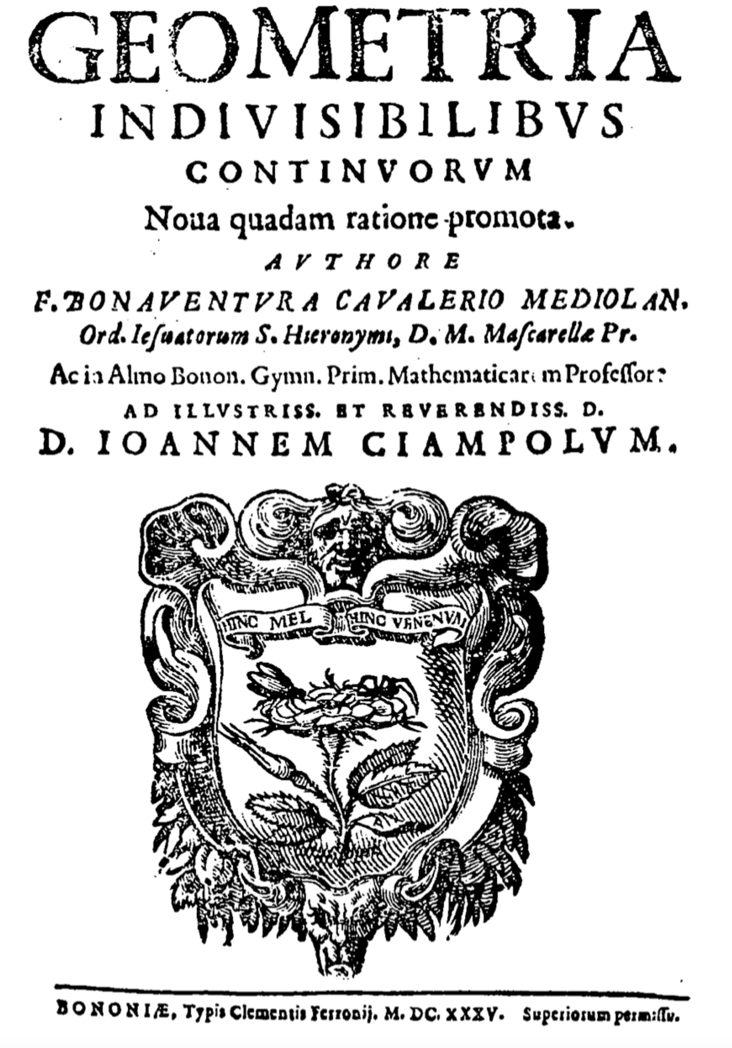
Both the order and style of the propositions show that Barrow thought of them as serving special purposes rather than elaborating a central, organizing concept. Viewed in retrospect, Proposition 19 ought to form either the basis or the culmination of Lecture XI. Moreover, it should refer back to X:11 as its converse. Viewed in situ, it does neither. Except for taking advantage of a gradually developing economy of expression, it neither grounds the preceding propositions nor follows from them. Barrow assigns it no special conceptual or operational significance, but simply derives several corollaries concerning the summation of powers of the ordinate before shifting to a series of propositions on the transmutation of curves defined by ordinates emanating from a fixed center. What in substance becomes part of the fundamental theorem of the calculus is clearly not fundamental for Barrow. Given the geometrical style of his mathematics, there is no reason it should be.

Thinking algebraically counted. That is why historians of mathematics must be careful about referring to Barrow's methods as calculus in another – in geometric – guise. Conceptually the guise is everything. As Leibniz himself put it in a letter to Huygens:

> Il me semble que M. Wallis parle assez froidement de M. Newton et comme s'il estoit aisé de tirer ses methodes de leçons de M. Barrow. Quand les choses sont faites il est aisé de dire: et nos hoc poteramus. Les choses composées ne sçauraient estre si bien démelées par l'esprit humain sans aides de caractères.[77]

More than merely aiding the mind, the use of symbols reflected an approach to mathematics itself. In Leibniz's version at least, the calculus

La lettera di Leibiniz qui citata è del 1694.



GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
F. BONAVENTVRA CAVALERIO MEDIOLAN.
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr.
Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore
AD ILLVSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. IOANNEM CIAMPOLVM.

BONONIÆ, Typis Clementis Ferronij. M. DC. XXXV. Superiorum permissu.

DEFINIZIONI.

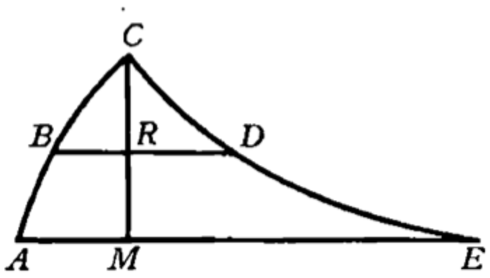
I.)

Se per tangenti opposte di una qualsivoglia figura piana data si conducono due piani mutuamente paralleli, perpendicolari, o inclinati rispetto al piano della figura data, indefinitamente prolungati dall'una e dall'altra parte, dei quali l'uno sia fatto muovere verso il rimanente, [rimanendo] ad esso sempre parallelo, fino a sovrapporsi ad esso – le singole linee rette, che durante tutto il moto sono intersezioni del piano mosso, e della figura data, prese insieme si chiamino: *tutte le linee*[1] di tale figura, presa come riferimento una di esse; e ciò quando i piani siano perpendicolari alla figura data. Quando invece sono inclinati rispetto ad essa, si chiamino: *tutte le linee del medesimo transito obliquo* della figura data, [presa] come riferimento del pari una di esse; si potrà tuttavia, quando convenga, chiamare anche le [linee] prima dette di transito retto, così, come [si chiamano] queste [ultime] di transito obliquo; [insomma] precisamente del [transito], che avviene in tale inclinazione dei piani paralleli rispetto alla figura data.

TEOREMA IV. PROPOSIZIONE IV.

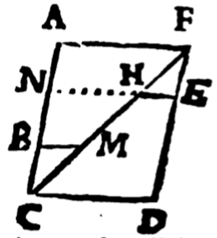
Se due figure piane, o solide, sono collocate sulla medesima altezza; se poi, condotte nelle figure piane linee rette qualunque, nelle solide piani qualunque tra di loro paralleli, rispetto alle quali e ai quali sia presa l'altezza detta, si sarà trovato che le porzioni delle linee condotte, intercette nelle figure piane, oppure le porzioni dei piani condotti, staccate dalle figure solide, sono grandezze proporzionali, esistendo sempre [linee, o piani] corrispondenti, le figure dette staranno tra di loro come uno qualunque degli antecedenti sta al suo conseguente ad esso corrispondente nell'altra figura[11].

Siano, dapprima, CAM, CME, due figure piane collocate nella medesima altezza, nelle quali si pensino comunque condotte due linee rette tra di loro parallele, AE, BD, rispetto alle quali si intenda presa l'altezza comune; siano poi le porzioni intercette dalle figure le [linee] AM, BR, nella figura CAM, e ME, RD, nella figura CME; si trovi inoltre che AM sta a ME come BR sta a RD. Dico che la figura CAM sta alla figura CME come AM sta a ME, oppure come BR sta a RD. Poiché infatti BD, AE, comunque con-



PROPOSITIO XXI.

In eodem Schemate, regula eadem: omnes cubi parallelogrammi, A D, quadrupli erunt omnium cuborum cuiusuis dictorum triangulorum, A C F, F C D.



ETenim o. c. parallelogrammi, A D, æquantur o. c. triangulorum, A C D F, F C D, & 3. factis sub, o. l. trianguli, A C F, & sub o. q. trianguli, F C D, vna cum 3. factis sub o. l. trianguli, F D C, & sub o. q. trianguli, F C D, vna cum 3. factis sub o. l. trianguli, F D C, & sub o. q. trianguli, A C F. Sunt autem o. c. A D, hoc est factum sub o. l. A D, & sub o. q. A D, ad factum sub ijsdem o. l. A D, & sub o. q. trianguli, F D C, vt o. q. parallelogrammi, A D, ad o. q. trianguli, F D C (quia communis est altitudo, nempè o l. A D,) hoc est in ratione tripla. o. c. ergo, A D, tripli erunt facti sub o. l. A D, & sub o. q. F D C, trianguli: & hoc æquatur facto sub o. l. trianguli, F A C, & sub o. q. trianguli, F D C, vna cum facto sub o. l. trianguli, F D C, & sub o. q. eiusdem trianguli, F D C, hoc est vna cum o. c. trianguli, F D C. Ergo o. c. A D, tripli erunt o. c. trianguli, F D C, & facti sub o. l. trianguli, A C F, & sub o. q. trianguli, F D

14. huius Cor. 18. huius.

Cor. 1. 11. huius

2. huius.

Etenim o.c. parallelogrammi, *AD*, aequantur o.c. triangulorum *ACF*, *FCD*, et 3 factis sub, o.l. trianguli, *ACF*, et sub o.q. trianguli FCD, una cum 3 factis sub o.l. trianguli, *FDC*, et sub o.q. trianguli, *ACF*...
Infatti tutti i cubi del parallelogramma *AD* sono uguali a tutti i cubi dei triangoli *ACF* e *FCD* e a 3 volte tutte le linee del triangolo *ACF* per tutti i quadrati del triangolo *FCD*, unitamente a 3 volte tutte le linee del triangolo *FDC* per tutti i quadrati del triangolo *ACF*...

$$\sum a^3 = 4\sum x^3 = 4\sum y^3, \text{ enunciato proposizione.}$$

$$\sum (x+y)^3 = \sum x^3 + \sum y^3 + 3\sum xy^2 + 3\sum xy^2$$

Il calcolo differenziale e integrale di Newton e Leibniz

- In che senso Newton e Leibniz possono essere considerati come i fondatori del calcolo?
- Quale fu il quadro concettuale che contraddistinse i loro approcci?
- Esempi tratti dall'opera di Newton
- Esempi tratti dall'opera di Leibniz

L'affermazione seconda la quale Newton e Leibniz furono gli scopritori del calcolo **non** significa (almeno non solo) che essi inventarono tecniche e metodi innovativi per la soluzioni di problemi quali la determinazione di rette tangenti ad una curva data e il calcolo di aree e di volumi. E' noto infatti che un certo numero di tale questioni era già stato affrontato con un discreto successo nei decenni precedenti la loro opera.
Piuttosto, Newton e Leibniz ebbero il merito di comprendere appieno la possibilità di unificare in un quadro concettuale unitario tecniche e metodi differenti e di giungere ad una comprensione soddisfacente della relazione inversa che sussiste fra le operazioni di determinazione della tangente ad una curva e di calcolo di aree e di volumi.

Ma se è vero che Newton e Leibniz hanno contributo a forgiare uno strumento che ancora oggi è al cuore delle nostre conoscenze matematiche, dovremmo astenerci dall'identificare il loro "calcolo" con il nostro per almeno due motivi:

- Né il calcolo di Newton né quello di Leibniz ebbero ad oggetto "funzioni". La riformulazione del calcolo nei termini più familiari di tale concetto è una eredità della seconda metà del Settecento e in particolare di Leonard Euler.
- Il continuo di Newton e Leibniz è un continuo di tipo geometrico. Il continuo inteso come campo dei numeri reali fu formalizzato da Richard Dedekind (soltanto) nel 1872.