Isaac Newton (1642-1726) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Figure: Ritratto di Newton nel dipinto di Godfrey Kneller (1702)

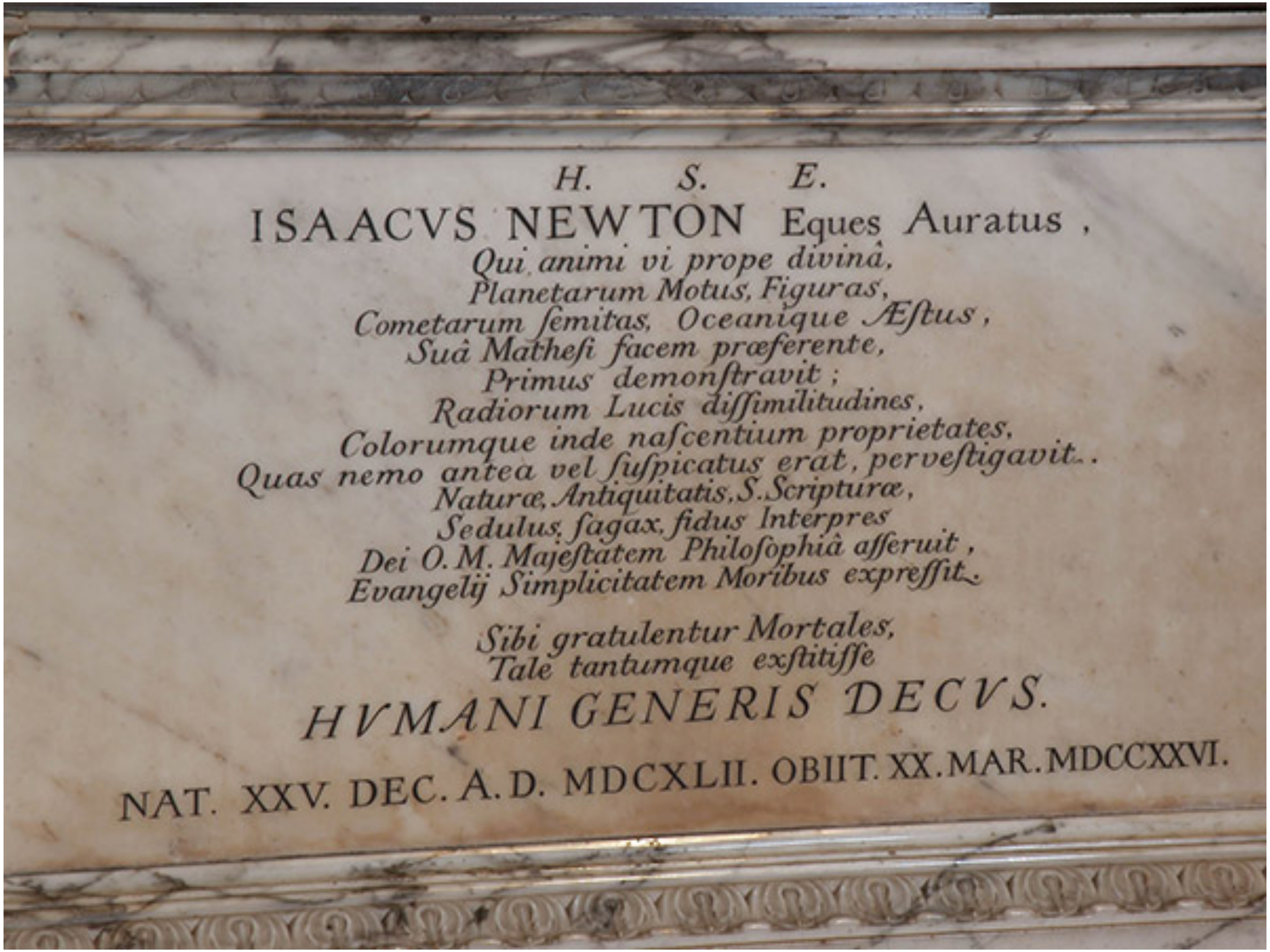
Figure: Ritratto di Leibniz conservato presso la Biblioteca di Hannover

Isaac Newton (1642-1726)

- 1642 nasce a Woolsthorpe, Lincolnshire
- 1661 si trasferisce a Cambridge al Trinity College
- 1665-1666 *biennium mirabile* (lontano da Cambridge, a causa della peste)
- 1669 assume la cattedra lucasiana a Cambridge
- 1672 diventa membro della Royal Society
- 1687 pubblica la prima edizione dei *Principia*
- 1696 si trasferisce a Londra per assumere incarichi istituzionali: prima “guardiano” e poi direttore della Zecca Reale
- 1703 diventa presidente della Royal Society
- 1704 pubblica *Opticks*
- 1705 viene nominato cavaliere da Anna Stuart
- 1726 muore nel mese di marzo e seppellito con tutti gli onori nell’Abbazia di Westminister

Isaac Newton (1642-1726)

Isaac Newton (1642-1726)



La biblioteca personale di Newton: 1750 volumi ca.

Alchimia: 8 %, **Chimica**: 1.5 %, **Fisica e Ottica**: 3 %, **Astronomia**: 1.5 %, **Medicina**: 3 %, **Geografia**: 4.5%, **Teologia**: 27.5 %, **Matematica**: 7 %, **Letteratura classica**: 9%, **Storia**: 8%, ecc..

Table 1.1 Mathematical Books Annotated by Newton in the 1660s

René Descartes	*Geometria, à Renato des Cartes*, Amsterdam, 1659–61
François Viète	*Opera Mathematica*, Leiden, 1646
Frans van Schooten	*Exercitationum Mathematicarum*, Leiden, 1657
William Oughtred	*Clavis Mathematicae*, 3d ed., Oxford, 1652
John Wallis	*Operum Mathematicorum Pars Altera*, Oxford, 1656
John Wallis	*Commercium Epistolicum*, Oxford, 1658

Figure: Tabella tratta da Guicciardini, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, 2009.

Contrariamente ai suoi fondamentali contributi alla Fisica (*Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, 1687) e all'Ottica (*Opticks*, 1704), gran parte dei lavori matematici di Newton rimasero per lunghissimo tempo inediti e solo in anni relativamente recenti (1967-1981) una mole cospicua di manoscritti furono effettivamente pubblicati da D. T. Whiteside, *Mathematical Papers of Isaac Newton* (MP), in 8 voll. E' certo tuttavia che alcuni di questi manoscritti ebbero una qualche circolazione fra una ristretta cerchia di matematici inglesi, prima e dopo la morte di Newton.

Alcune delle principali opere matematiche di Newton

- *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*. Composizione: 1669. Edito in MP, 2, pp. 206-47. Prima stampa: 1711.
- *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum*. Composizione 1670-1671. Edito in MP, 3, pp. 38-328. Prima stampa: 1736.
- *Geometria Curvilinea*. Composizione: 1680 ca. Edito in MP, 4, pp. 420-525.
- *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, Prima Edizione 1687. Seconda e Terza Edizione nel 1713 e 1726 rispettivamente.
- *Tractatus de Quadratura Curvarum*. Prima stampa *Opticks* (1704), pp. 165-211.

Si tratta della scoperta della serie binomiale

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

con

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-n+1)}{n!},$$

per α razionale (positivo o negativo).

Dalla *Epistula Prior* (1676) di Newton a Oldenburg per la trasmissione a Leibniz.

Extractions of roots are much shortened by this theorem,

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc.}$$

where $P+PQ$ signifies the quantity whose root or even any power, or the root of a power, is to be found; P signifies the first term of that quantity, Q the remaining terms divided by the first, and m/n the numerical index of the power of $P+PQ$, whether that power is integral or (so to speak) fractional, whether positive or negative.

I simboli $A, B, C, \ldots$ denotano il termine immediatamente precedente: $A = P^{\frac{m}{n}}$, $B = \left(\frac{m}{n}\right) AQ, \ldots$

Il manoscritto denominato "The October 1666 Tract on Fluxions" è particolarmente interessante. Esso raccoglie le ricerche sul calcolo che Newton portò avanti nel cosiddetto *biennium mirabilissimum* (1665-1666), un periodo estremamente prolifico che Newton trascorse nel nativo Lincolnshire, quando Cambridge fu colpita dalla peste.
Qui Newton ebbe l'idea (non completamente nuova, per la verità) di affrontare il problema della determinazione delle rette tangenti a una curva, combinando le velocità componenti di un punto materiale in un opportuno sistema di coordinate.
Newton considera la curva di equazione $f(x, y) = 0$ come il luogo dei punti di intersezione di due rette mobili, una verticale e una orizzontale. In tal modo le coordinate del punto mobile, chiamiamolo P, x, y dipenderanno dal tempo t. Il moto di P veniva riguardato come la composizione di un moto orizzontale con velocità $\dot{x}$ e di un moto verticale con velocità $\dot{y}$. Il rapporto $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ fornisce la pendenza delle vettore tangente alla curva nel punto $P = (x(t), y(t))$. In termini moderni, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$.
Le quantità generate dal moto venivano dette "fluenti", mentre le velocità istantanee ad esse associate venivano dette "flussioni".

Quanto alla determinazione del rapporto fra le velocità $\dot{x}, \dot{y}$, Newton prescriveva la seguente procedura:

> *Set all y^e termes on one side of y^e equation that they become equal to nothing. And first multiply each terme by so many times $\dot{x}/x$ as x hath dimensions in that terme. Secondly multiply each terme by so many times $\dot{y}/y$ as y hath dimensions in it [...] the summe of all these products shall bee equall to nothing. W^{ch} Equation gives y^e relation of y^e velocitys.*

In termini moderni, se $f(x,y) = \sum a_{sr} x^s y^r = 0$, la relazione per le "velocità" è data da:

$$\sum \left(\frac{s\dot{x}}{x} + \frac{r\dot{y}}{y} \right) a_{sr} x^s y^r = 0,$$

o, equivalentemente:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}.$$

Per giustificare questa procedura, Newton osservò che se la velocità di un corpo è costante, allora lo spazio percorso è proporzionale alla velocità. Ma:

> *And though they move not uniformly yet are y^e infinitely little lines w^{ch} each moment they describe, as their velocities w^{ch} they have while they describe y^m.*

L'idea era che durante un intervallo di tempo infinitamente piccolo o, il moto del corpo è sostanzialmente uniforme.

> *Soe y^t if y^e described lines bee x and y, in one moment, they will bee $x + \dot{x}o$ and $y + o\dot{y}$ in y^e next.*

$$\sum a_{sr}(x+\dot{x}o)^s(y+\dot{y}o)^r = 0.$$

Espandendo i binomi, si ha:

$$\sum a_{sr}x^s y^r + \sum a_{sr}x^s(ry^{r-1}\dot{y}o + \text{termini in } o^2) +$$

$$+\sum a_{sr}y^r(sx^{s-1}\dot{x}o + \text{termini in } o^2) + \text{termini in } o^2.$$

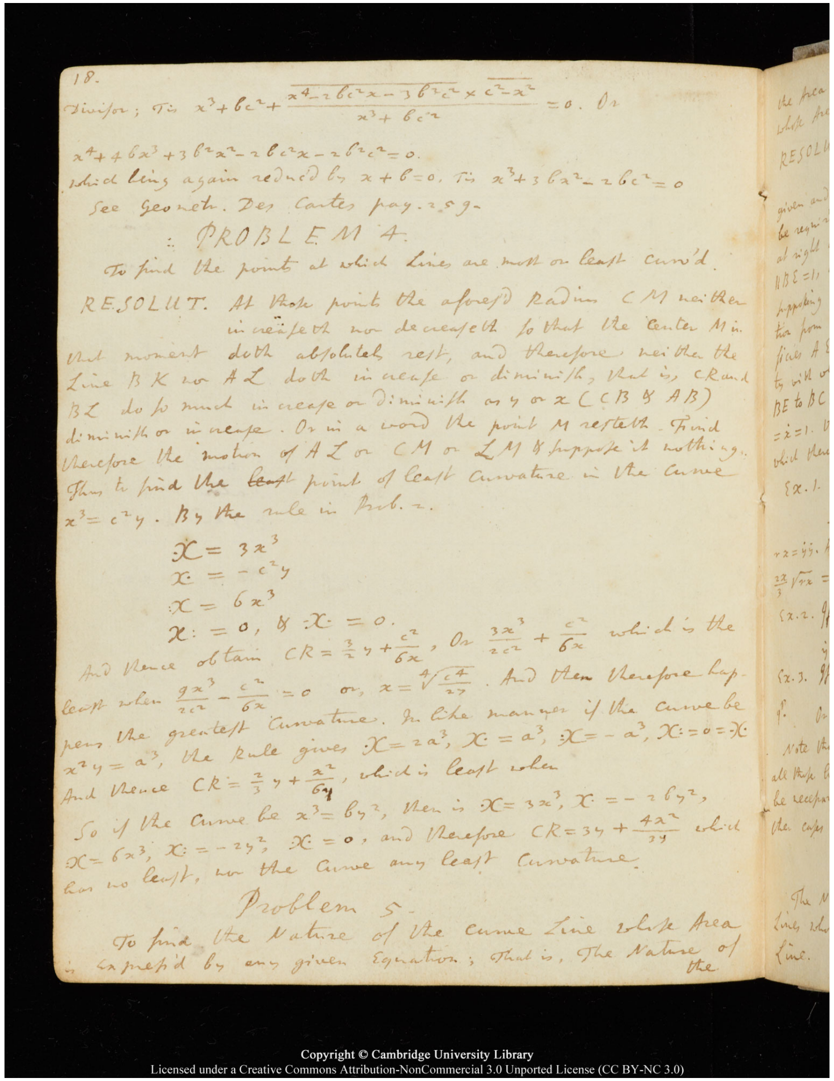
Osservando che $\sum a_{sr}x^s x^r = 0$ e cancellando i termini in o^2, si ottiene:

$$\sum a_{sr}(rx^s y^{r-1}\dot{y}o + sy^r x^{s-1}\dot{x}o) = 0.$$

Infine dividendo per o, si ricava la relazione cercata.

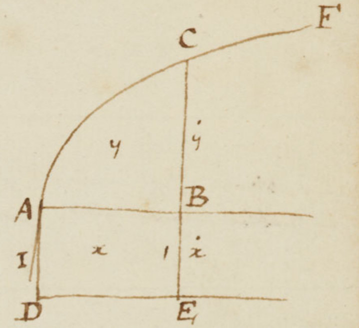
The October 1666 Tract on Fluxions

In questo trattato, Newton affrontò anche il tema del calcolo di aree in termini dell'operazione di antiderivazione, pervenendo ad una prima esplicita formulazione del teorema fondamentale del calcolo integrale. A fianco, manoscritto probabilmente di pugno di Newton. Cambridge University Library



19.

the Area being given, to find the Nature of the Curve Line whose Area it is.



RESOLUTION. If the relation of $AB = x$ and Area $ABC = y$, be given and the relation of $AB = x$, & $BC = \dot{y}$ be requir'd, (BC being Ordinate to AB at right angles) make $DE \parallel AB \perp AD \parallel BE = 1$, and then is $\square ABED = x$; Now supposing the Line CBE by parallel motion from AD, to describe the two superficies $AE = x$ & $ABC = y$; The velocity with which they increase will be as BE to BC; that is the motion by which x increases being $BE = \dot{x} = 1$. the motion by which y increases will be $BC = \dot{y}$ which therefore may be found by Theor. 1.

Ex. 1. If $\frac{2x}{3}\sqrt{rx} = y$, Or $-4rx^3 + 9y^2 = 0$, Then, $-12rx^2 + 18y\dot{y} = 0$, th. $\dot{y}\ (= \frac{12rx^2}{18y} = \frac{2rxx}{3y}) = \sqrt{rx}$. Or, $rx = \dot{y}\dot{y}$. And th. ABC is the Parabola whose Area ABC is $\frac{2x}{3}\sqrt{rx} = \frac{2}{3}x\dot{y}$.

Ex. 2. If $x^3 - ay + xy = 0$, Then $\frac{3xx+y}{-x+a} = \dot{y}$, Or $\frac{3ax^2 - 2x^3}{a^2 - 2ax + x^2} = \dot{y} = BC$.

Ex. 3. If $\frac{na}{n+m}x^{\frac{m+n}{n}} - y = 0$, Then $ax^{\frac{m}{n}} = \dot{y}$

4ly. Or if $ax^m = bx^n$, then is $\frac{max^{m-1}}{nbx^{n-1}} = \dot{y}$

Note that by this Problem may be gather'd a Catalogue of all those lines which can be squared. And therefore it will not be necessary to shew how this Problem may be resolv'd in other cases in which $\dot{y}$ is Ordinate apply'd to x at right Angles.

PROBLEM. 6.

The Nature of any Curve Line being given, To find other Lines whose Areas may be compared to the Area of that given Line.

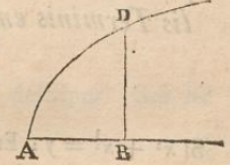
De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas, 1669, (1711).

DE ANALYSI

Per Æquationes Numero Terminorum INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonstratam habes.

BASI *AB* Curvæ alicujus *AD*, sit Applicata *BD* perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & sint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,



Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} =$ *Areæ ABD.*

Res Exemplo patebit.

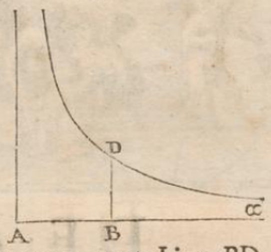
1. Si x^2 $(= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc est, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3 = ABD$.

A 2. Si

De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas, 1669, (1711).

2. Si $4\sqrt{x}\ (=4x^{\frac{1}{2}})=y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\ (=\frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3})=$ ABD.
3. Si $\sqrt[3]{x^5}\ (=x^{\frac{5}{3}})=y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\ (=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8})=$ ABD.
4. Si $\frac{1}{x^2}\ (=x^{-2})=y$, id eſt, ſi $a=1=n$, & $m=-2$;

Erit $(\frac{1}{-1}x^{\frac{-1}{1}}=)-x^{-1}\ (=\frac{-1}{x})=\alpha$BD, infinite verſus α protenſæ, quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.



5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}}\ (=x^{-\frac{3}{2}})=y$; Erit $(\frac{2}{-1}x^{-\frac{1}{2}}=)\frac{2}{-\sqrt{x}}$ $=$ BDα.
6. Si $\frac{1}{x}\ (=x^{-1})=y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}}=\frac{1}{0}x^0=\frac{1}{0}\times 1=\frac{1}{0}=$ Infinitæ, qualis eſt Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.

Compoſitarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

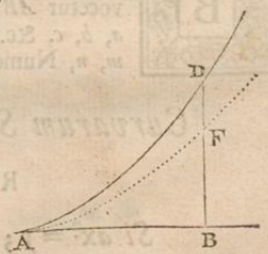
REGULA II.

Si valor ipſius y *ex pluribus iſtiuſmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a ſingulis Terminis emanant.*

Exempla Prima.

Si $x^2+x^{\frac{3}{2}}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ ABD.

Etenim ſi ſemper ſit $x^2=$ BF, et $x^{\frac{3}{2}}=$ FD, erit, ex præcedente Regula, $\frac{1}{3}x^3=$ ſuperficiei AFB deſcriptæ per Lineam BF, et $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ AFD deſcriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ toti ABD.



Sic ſi $x^2-x^{\frac{3}{2}}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ ABD.

Et ſi $3x-2x^2+x^3-5x^4=y$; Erit $\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-x^5=$ ABD.

Ex-

De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas, 1669, (1711).

Aliarum Omnium Quadratura.

REGULA III.

Sin valor ipsius y, vel aliquis ejus Terminus sit præcedentibus magis compositus, in Terminos Simpliciores reducendus est; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes solvunt; & ex istis Terminis quæsitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.

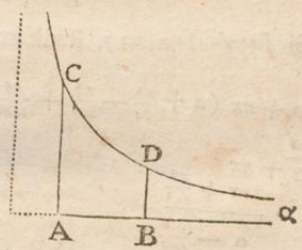
Exempla Dividendo.

Sit $\frac{aa}{b+x}=y$; Curva nempe existente Hyperbola.

Jam ut Æquatio ista a Denominatore suo liberetur, Divisionem sic instituo.

$$b+x)\ aa+0\ \left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\ \&c.\right.$$

$$\begin{array}{l}
aa+\frac{aax}{b} \\
\hline
0-\frac{aax}{b}+0 \\
-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2} \\
\hline
0+\frac{aax^2}{b^2}+0 \\
+\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3} \\
\hline
0-\frac{aax^3}{b^3}+0 \\
-\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4} \\
\hline
0+\frac{aax^4}{b^4} \\
\&c.
\end{array}$$

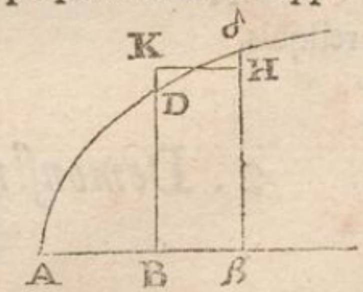


B Et

1. *Demonſtratio quadraturæ curvarum ſimplicium in Regula prima.*

Præparatio pro Regula prima demonſtranda.

Sit itaque curvæ alicujus $AD\delta$ Baſis $AB = x$, perpendiculariter applicata $BD = y$, & area $ABD = z$, ut prius. Item ſit $B\beta = o$, $BK = v$, & rectangulum $B\beta HK$ (ov) æquale ſpatio $B\beta\delta D$.



Eſt ergo $A\beta = x + o$, & $A\delta\beta = z + ov$. His præmiſſis, ex relatione inter x & z ad arbitrium aſſumpta quæro y iſto, quem ſequentem vides, modo.

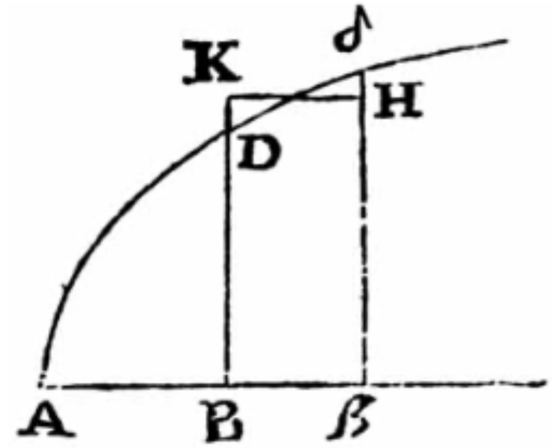
Pro lubitu ſumatur $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, ſive $\frac{4}{9}x^3 = zz$. Tum $x + o$ $(A\beta)$ pro x, & $z + ov$ $(A\delta\beta)$ pro z ſubſtitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 =$ (ex natura curvæ) $z^2 + 2zov + o^2v^2$.

Et

Et ſublatis ($\frac{4}{9}x^3$ & zz) æqualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + ov^2$. Si jam ſupponamus $B\beta$ in infinitum diminui & evaneſcere, ſive o eſſe nihil, erunt v & y æquales, & termini per o multiplicati evaneſcent, quare reſtabit $\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv$, ſive $\frac{2}{3}xx \; (= zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, ſive $x^{\frac{1}{2}} \left(= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y$. Quare e contra ſi $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

Demonſtratio.

Vel generaliter, ſi $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; ſive, ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, & $m+n = p$, ſi $cx^{\frac{p}{n}} = z$, ſive $c^n x^p = z^n$: tum $x + o$ pro x, & $z + ov$ (ſive, quod perinde eſt, $z + oy$) pro z, ſubſtitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, &c. $= z^n + noyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe terminis, qui tandem evaneſcerent, omiſſis. Jam ſublatis $c^n x^p$ & z^n æqualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $c^n p x^{p-1} = nyz^{n-1} \left(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}\right)$ ſive, dividendo per $c^n x^p$, erit $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$ ſive $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel reſtituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m+n$ pro p, hoc eſt, m pro $p-n$, & na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare e contra, ſi $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.



Con riferimento alla figura, Newton considera una curva $AD\delta$, con $AB = x$, $BD = y$; l'area ABD è z. Definisce quindi $B\beta = o$ e $BK = v$, in maniera che $B\beta HK = ov$ sia uguale all'area $B\beta\delta D$. Infine assume che $B\beta$ sia infinitamente piccolo (una quantità *infinite parvam*).
Ne deriva che $A\beta = x + o$ e che l'area $A\delta\beta$ è $z + ov$. Quindi, Newton dichiara di voler cercare y una volta che sia supposta nota la relazione tra x e z. A tal fine, osserva che l'incremento dell'area ov diviso per l'incremento dell'ascissa o è v. Ma poiché o è supposto essere nullo (o infinitamente piccolo) v e y sono uguali. Ne deriva che l'incremento dell'area rispetto alla variazione o di ascissa è proprio uguale all'ordinata. Detto altrimenti: la "derivata" (la flussione) dell'area sottesa dalla curva coincide con l'ordinata della curva stessa.

Sia $z = \text{Area}(ABD) = \frac{2}{3}x^{3/2}$. Allora, potrò scrivere $zz = \frac{4}{9}x^3$. Sostituisco x con $x + o$ e z con $z + ov$. Si avrà:

$$\frac{4}{9}(x^3 + 3x^2 o + 3xo^2 + o^3) = z^2 + 2zov + o^2 v^2.$$

Ora, semplificati $\frac{4}{9}x^3$ e z^2(*sublatis equalibus*) e divisi i rimanenti per o, si ha:

$$3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + ov^2.$$

Da cui supponendo che $o = 0$ (*supponamus $B\beta = o$ in infinitum diminui et evanescere, sive o esse nihil*) e che $v = y$, si ricava:

$$\frac{4}{3}x^2 = 2zv$$

e quindi:

$$y = x^{1/2}.$$

De methodis serierum et fluxionum, 1671 (1736).

THE

METHOD of FLUXIONS

AND

INFINITE SERIES;

WITH ITS

Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR

Sir ISAAC NEWTON, *K^t.*

Late Prefident of the Royal Society.

Tranflated from the AUTHOR'*s* LATIN ORIGINAL
not yet made publick.

To which is fubjoin'd,

A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,

Confifting of

ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,

In order to make this Treatife

A compleat Inftitution for the ufe of LEARNERS.

By *JOHN COLSON*, M.A. and F.R.S.
Mafter of Sir *Jofeph Williamfon*'s free Mathematical-School at *Rochefter*.

LONDON:
Printed by HENRY WOODFALL;
And Sold by JOHN NOURSE, at the *Lamb* without *Temple-Bar*.
M.DCC.XXXVI.

THE CONTENTS.

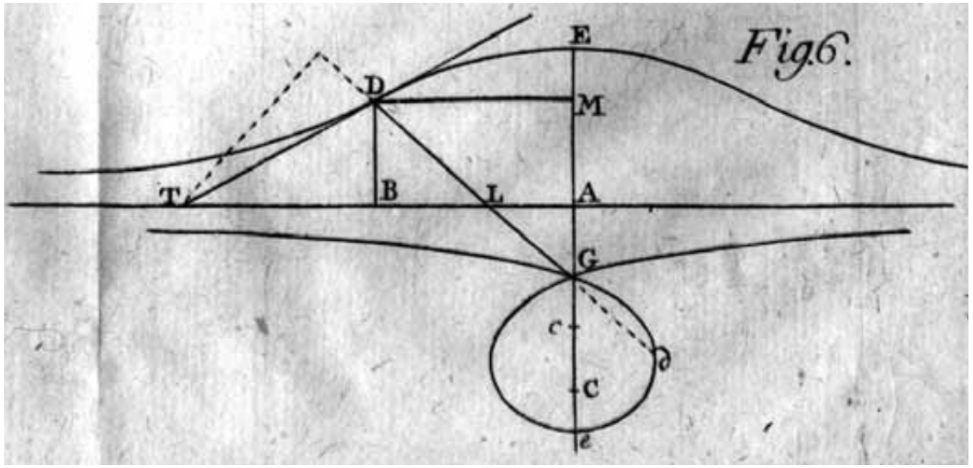
Problema 1, nel caso in cui la relazione data non sia di tipo polinomiale.

> *Whenever complex fractions or surd quantities are present in the proposed equation, in place of each I put a corresponding letter and, supposing these to designate fluent quantities, I work as before. Then I suppress and exterminate the letters ascribed.*

Consideriamo $y^2 - a^2 - x\sqrt{a^2 - x^2}$. Newton pone $z := x\sqrt{a^2 - x^2}$ e ottiene: $y^2 - a^2 - z = 0$ e $a^2x^2 - x^4 - z^2 = 0$. Applicando ora il metodo diretto delle flussioni: $2\dot{y}y - \dot{z}$ e $2a^2\dot{x}x - 4\dot{x}x^3 - 2\dot{z}z = 0$. Elimina nella seconda equazione $\dot{z}$ a partire dalla prima, ripristina $z = x\sqrt{a^2 - x^2}$ e ottiene infine:

$$2\dot{y}y + (-a^2\dot{x} + 2\dot{x}x^2)/\sqrt{a^2 - x^2} = 0$$

De methodis serierum et fluxionum, 1671 (1736).



Il problema terzo del trattato (che si articola per un totale di 12 problemi) recita così: determinare massimi e minimi. Scriveva Newton in questo passaggio:

> *Quando una quantità è massima o minima, in quel momento, il suo flusso né cresce né decresce: perché se crescesse, ciò proverebbe che era minore e che subito sarà maggiore di quanto è ora, e viceversa se decresce. Dunque si cerchi la sua flussione e la si ponga uguale a zero.*

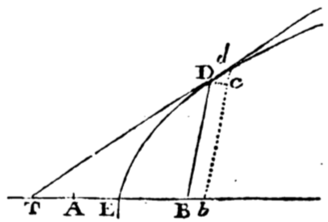
De methodis serierum et fluxionum, 1671 (1736).

PROB. IV.

To draw Tangents to Curves.

Firſt Manner.

1. Tangents may be variouſly drawn, according to the various Relations of Curves to right Lines. And firſt let BD be a right Line, or Ordinate, in a given Angle to another right Line AB, as a Baſe or Abſciſs, and terminated at the Curve ED. Let this Ordinate move through an indefinitely ſmall Space to the place *bd*, ſo that it may be increaſed by the Moment *cd*, while AB is increaſed by the Moment B*b*, to which D*c* is equal and parallel. Let D*d* be produced till it meets with AB in T, and this Line will touch the Curve in D or *d*; and the Triangles *dc*D, DBT will be ſimilar. So that it is TB : BD :: D*c* (or B*b*) : *cd*.



2. Since therefore the Relation of BD to AB is exhibited by the Equation, by which the nature of the Curve is determined; ſeek for the Relation of the Fluxions, by Prob. 1. Then take TB to BD in the Ratio of the Fluxion of AB to the Fluxion of BD, and TD will touch the Curve in the Point D.

3. Ex. 1. Calling AB $= x$, and BD $= y$, let their Relation be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. And the Relation of the Fluxions will be $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$. So that $\dot{y} : \dot{x} :: 3xx - 2ax + ay : 3y^2 - ax ::$ BD (y) : BT. Therefore BT $= \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$. Therefore the Point D being given, and thence DB and AB, or y and x, the length BT will be given, by which the Tangent TD is determined.

When an equation involving the fluxions of quantities is exhibited, to determine the relation of the quantities one to another.

Vari metodi (metodo inverso delle flussioni):

- Quadratura attraverso espansione in serie,
- Quadratura per mezzo di equazioni finite,
- Quadratura per mezzo del confronto con altre curve.

Esempio di Newton:

$$\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^3 + ax\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) + a^2\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) - x^3 - 2a^3 = 0;$$

Applicando il cosiddetto "metodo di Newton" (*De Analysi*, §2) per la risoluzione approssimata, si ha:

$$\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \dots.$$

E integrando termine a termine:

$$y = ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \dots.$$

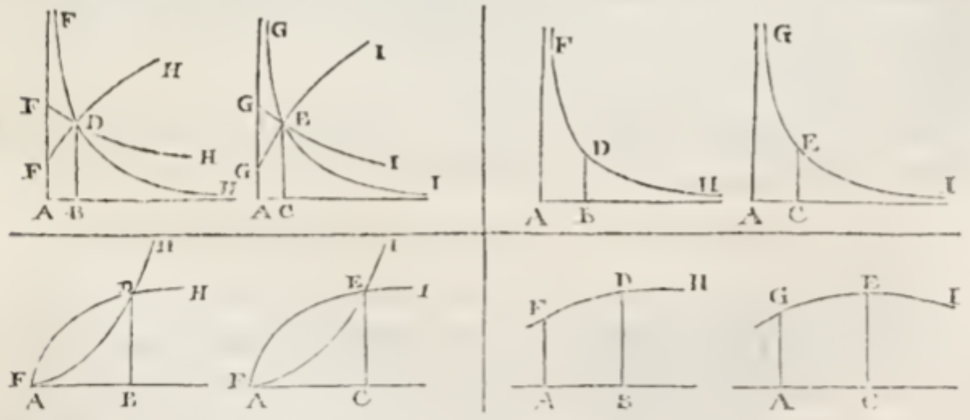
De methodis serierum et fluxionum, 1671

Nel problema ottavo, Newton fornisce una propria versione della regola di integrazione per sostituzione.

PROB. VIII.

To find as many Curves as you pleaſe, whoſe Areas ſhall have a relation to the Area of any given Curve, aſſignable by finite Equations.

1. Let FDH be a given Curve, and GEI the Curve required, and conceive their Ordinates DB and EC to move at right Angles upon

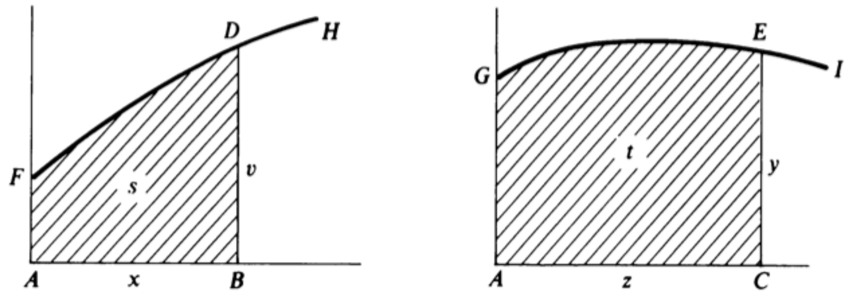


their Abſciſſes or Baſes AB and AC. Then the Increments or Fluxions of the Areas which they deſcribe, will be as thoſe Ordinates drawn

M into

into their Velocities of moving, that is, into the Fluxions of their Abſciſſes. Therefore make AB $= x$, BD $= v$, AC $= z$, and CE $= y$, the Area AFDB $= s$, and the Area AGEC $= t$, and let the Fluxions of the Areas be $\dot{s}$ and $\dot{t}$: And it will be $\dot{x}v : \dot{z}y :: \dot{s} : \dot{t}$. Therefore if we ſuppoſe $\dot{x} = 1$, and $v = \dot{s}$, as before; it will be $\dot{z}y = \dot{t}$, and thence $\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = y$.

2. Therefore let any two Equations be aſſumed; one of which may expreſs the relation of the Areas s and t, and the other the relation of their Abſciſſes x and z, and thence, (by Prob. 1.) let the Fluxions $\dot{t}$ and $\dot{z}$ be found, and then make $\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = y$.



FDH sia descritta da $v = f(x)$, s sia l'area di *AFDB*; *GEI* curva descritta $y = g(z)$, t sia l'area di *AGEC*.
Vale: $\frac{\dot{s}}{\dot{t}} = \frac{v\dot{x}}{y\dot{z}}$. Si sceglie $\dot{x} = 1$, si ricava $\dot{s} = v$ e che inoltre la fluente z dipende da x: $z = \phi(x), x = \psi(z)$. Assumendo inoltre che le due aree siano uguali, $s = t$, si ottiene:

$$y = \frac{v}{\dot{z}} = \frac{f(x)}{\phi'(x)} = \frac{f(\psi(z))}{\phi'(\psi(z))},$$

cioè: $y = f(\psi(z))\psi'(z)$; finalmente, otteniamo in notazione (leibniziana) moderna:

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(z))\psi'(z)dz \qquad \text{per sostituzione di } x = \psi(z).$$

De methodis serierum et fluxionum, 1671

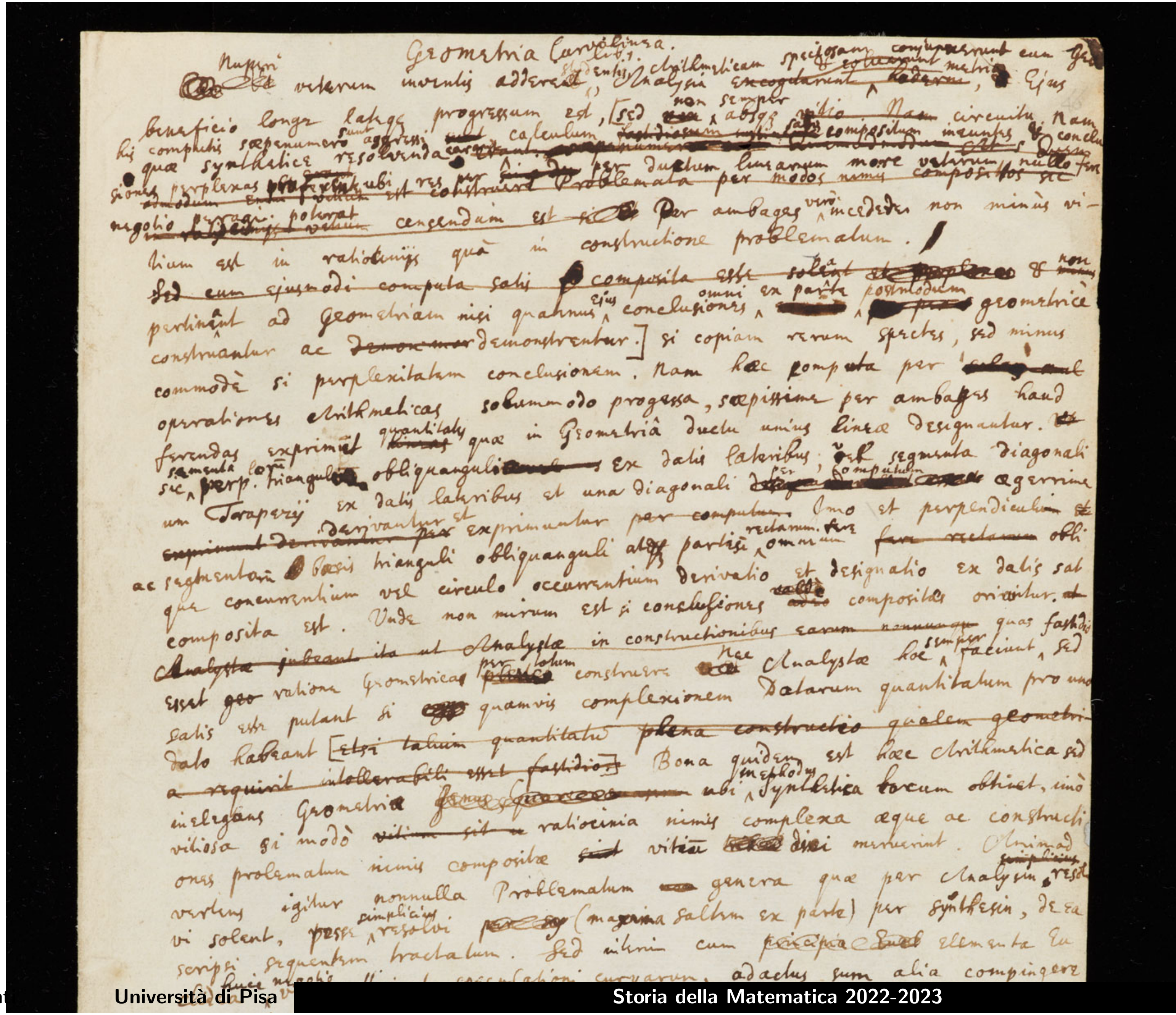
Sino alla composizione del *De methodis serierum et fluxionum* (1670-1671), Newton si presenta come un convinto sostenitore degli strumenti della nuova analisi.

> *Observing that the majority of geometers, with an almost complete neglect of the ancients' synthetical method, now for the most part apply themselves to the cultivation of analysis and with its aid have overcome so many formidable difficulties that they seem to have exhausted virtually everything apart from the squaring of curves and certain topics of like nature not yet fully elucidated: I found not amiss, for the satisfaction of learners, to draw up the following short tract in which I might at once widen the boundaries of the field of analysis and advance the doctrine of series. (MP, III, 33)*

Tuttavia a partire dalla metà degli anni Settanta, egli comincia a criticare i "moderni", ad esempio Cartesio e la soluzione da lui proposta nella *Géométrie* del problema di Pappo:

> *Indeed their [the Ancients'] method is more elegant by far than the Cartesian one. For he [Descartes] achieved the results by an algebraic calculus which, when transposed into words (following the practice of the Ancients in their writings), would prove to be so tedious and entangled as to provoke nausea, nor might it be understood. But they accomplished it by certain simple propositions, judging that nothing written in a different style was worthy to be read, and in consequence concealing the analysis by which they found their constructions. (MP, IV, 277)*

La citazione è tratta da un manoscritto datato da Whiteside verso la fine degli anni '70 che reca il titolo *Veterum Loca Solida Restituta*.



libro primo tradentur, secundus continebit problemata quibus usus Theorematum libri primi patebit in derivatione fluxionum a quantitatibus. Tertius e contra continebit problemata in quibus quantitates derivantur a fluxionibus, quartus erit de natura curvarum in genere deq; constructione problematum per earum intersectiones.[18]

LIB. I.[19]

DEFINITIONES.[20]

1. Fluens est quod continua mutatione augetur vel diminuitur.
2. Fluxio est celeritas mutationis illius.
3. Fluxio affirmativa, sive Profluxio est celeritas tum incrementi rei affirmativæ tum decrementi negativæ sive ablativæ.
4. Fluxio negativa sive Defluxio est celeritas tum decrementi rei affirmativæ tum incrementi negativæ.

Schol.[21] Per negativam rem intellige quicquid subducitur vel restat subducendo majus e minori. Sic in negotijs humanis, Debita sunt negativa quia rem diminuunt, restantq; subducendo majorem substantiam de minori. Et incrementum Debiti est Defluxio substantiæ realis, decrementum vero profluxio ejus. Sic et in composito quovis $A-B$ incrementum negativi B defluxio est quia diminuit compositum.

5. Eodem modo fluere dicuntur quæ omnia fluunt affirmativè vel omnia negativè: diverso modo quorum unum fluit affirmativè alterum negative.
6. Permanens voco et stabile vel etiam datum ac determinatum quod non fluit.

Geometria curvilinea GC (1680 circa)

7. Polus lineæ rectæ mobilis est punctum in quo recta illa circumacta incipit locum linearem quem modo occupavit secare, vel in quo desinit secare si in locum istum revertitur.

8. Locus puncti moventis est linea sive recta sive curva quam punctum istud motu suo describit.

9. Determinatio vel Plaga motûs puncti istius[22] est positio rectæ lineæ tangentis Curvam illam ad punctum illud movens.

[23]10. Quantitas per quantitatem exaltari dicitur quando multiplicatur per rationem ejus ad unitatem.

11. Quantitas per quantitatem deprimi dicitur quando dividitur per rationem ejus ad unitatem.

AXIOMATA.[24]

1. Quæ sunt perpetim æqualia, fluxionibus æqualibus generantur.
2. Quæ fluxionibus æqualibus simul generantur sunt æqualia.
3. Quæ sunt perpetim in ratione data, fluxiones habent in eadem ratione.
4. Quæ fluxionibus in data ratione simul generantur sunt in ratione fluxionum.

Nota simul generari intelligo quæ tota eodem tempore generantur.[25]

5. Fluxio totius æquatur fluxionibus partium simul sumptis.
6. Fluxiones quantitatum sunt in prima ratione partium nascentium, vel quod perinde est, in ultima ratione partium istarum per defluxionem vicissim evanescentium.[26] Sint *AB*, *CD* fluentes quantitates. Fluant hæ donec evadant *AE*, *CF*. Dico fl: *AB* esse ad fl: *CD* in prima ratione quam partes generatæ *BE*, *DF* habebant, id est in ratione quam partes istæ habebant in principio generationis, vel quod perinde est, in ultima ratione quam possunt habere ubi *AE* et *CF* vicissim defluentes evadant *AB* et *CD*.