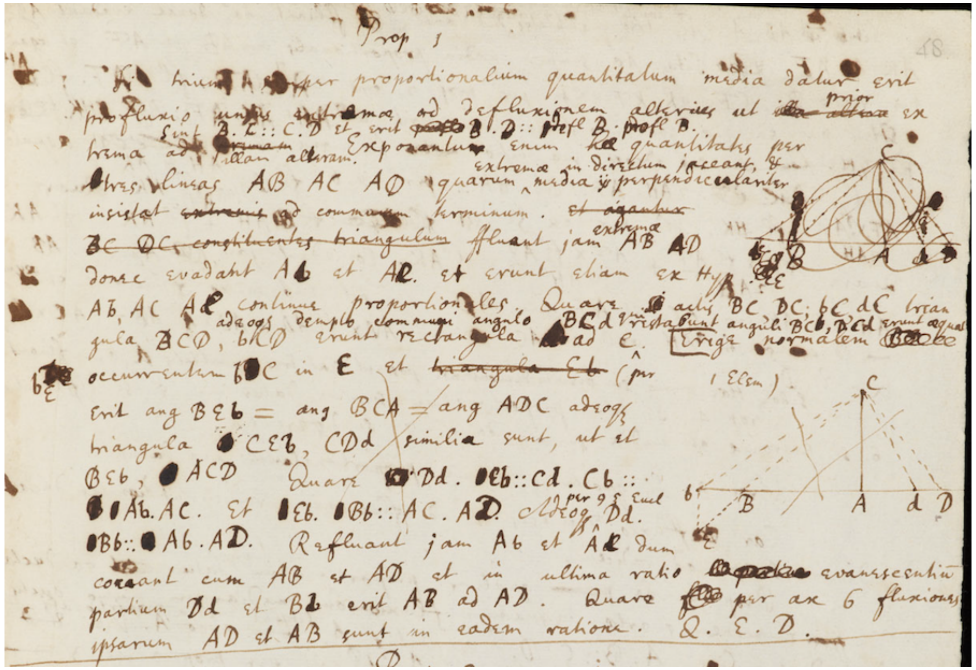
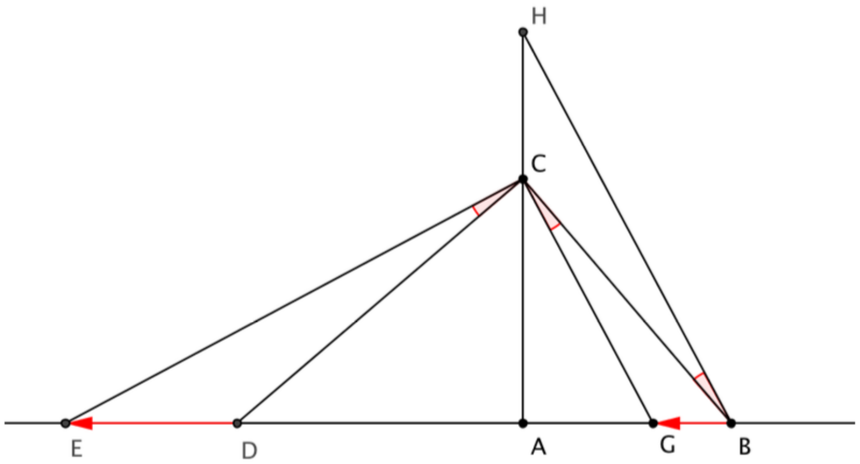
Geometria curvilinea GC (1680 circa), Proposizione I

Un esempio di impiego del cosiddetto metodo sintetico delle flussioni è fornito nel manoscritto GC. Si tratta di un tentativo di riformulazione geometrica dei metodi analitici che Newton ha adottato in precedenza.



Se di tre quantità in proporzione continua è data la quantità intermedia, mentre le altre due fluiscono allora la proflussione di un'estrema sta alla deflussione dell'altra come la prima sta all'altra.
Si hanno cioè tre grandezze $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ tali che $\mathcal{B} : \mathcal{C} = \mathcal{C} : \mathcal{D}$; si vuole dimostrare che: $\mathcal{B} : \mathcal{D} = -\mathrm{fl}(\mathcal{B}) : \mathrm{fl}(\mathcal{D})$, dove $\mathrm{fl}(\mathcal{E})$ indica la flussione associata a $\mathcal{E}$.



AB indica la grandezza $\mathcal{B}$, AD la grandezza $\mathcal{D}$ e AC la grandezza $\mathcal{C}$. Sia BH parallela a CG. I triangoli DCE e CBH sono simili (perché?). Si ha:

$$\frac{DE}{CH} = \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AC}, \quad \frac{CH}{BG} = \frac{AC}{AG}.$$

Da cui:

$$\frac{DE}{BG} = \frac{AD}{AG}$$

Il “limite” di $\dfrac{DE}{BG}$ è $-\dfrac{\mathrm{fl}(AD)}{\mathrm{fl}(AB)} = -\dfrac{\mathrm{fl}(\mathcal{D})}{\mathrm{fl}(\mathcal{B})}$, poiché “le flussioni delle quantità sono nel primo rapporto delle parti nascenti [...] o nell’ultimo rapporto delle parti evanescenti” (Assioma sesto). Per l’ultima relazione della slide precedente si ha infine:

$$\mathcal{B} : \mathcal{D} = -\mathrm{fl}(\mathcal{B}) : \mathrm{fl}(D),$$

si noti che il segno meno riflette il fatto che quando $\mathcal{B}$ descresce, $\mathcal{D}$ aumenta e viceversa.

Una versione analitica

Siano x, y quantità fluenti tali che $x : a = a = y$. Equivalentemente si ha: $xy = a^2$ e quindi, secondo le tecniche già viste:

$$\dot{x}y + x\dot{y} = 0, \quad \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -\frac{x}{y}.$$

Sezione I.

METODO DELLE PRIME E DELLE ULTIME RAGIONI [1], COL CUI AIUTO SI DIMOSTRANO LE COSE CHE SEGUONO

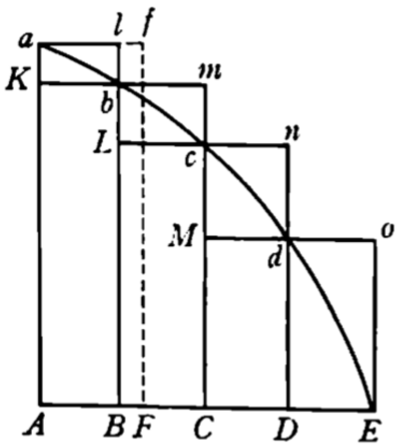
Lemma I.

Le quantità, come anche i rapporti fra quantità, che costantemente tendono all'eguaglianza in un qualsiasi tempo finito, e prima della fine di quel tempo si accostano l'una all'altra più di una qualsiasi differenza data, divengono infine uguali.

Se si nega questo, da ultimo saranno disuguali, e D sarà la loro differenza ultima. Di conseguenza non potranno accostarsi all'uguaglianza più della differenza data D. Ciò che è contro l'ipotesi.

Lemma II.

Se in una figura qualsiasi, AacE, *delimitata dalle rette* Aa, AE *e dalla curva,* acE, *vengono inscritti un qualsiasi numero* *di parallelogrammi* Ab, Bc, Cd, *ecc. con le basi* AB, BC, CD, *ecc., uguali, e con i lati* Bb, Cc, Dd, *ecc. paralleli al lato* Aa *della figura; e si completano i parallelogrammi* aKbl, bLcm, cMdn, *ecc., allora, se la larghezza di questi parallelogrammi diminuirà e il loro numero aumenterà all'infinito, dico che le ultime ragioni che hanno fra di loro la figura inscritta* AKbLcMdD, *quella circoscritta* AalbmcndoE, *e quella curvilinea* AabcdE, *sono ragioni di uguaglianza.*



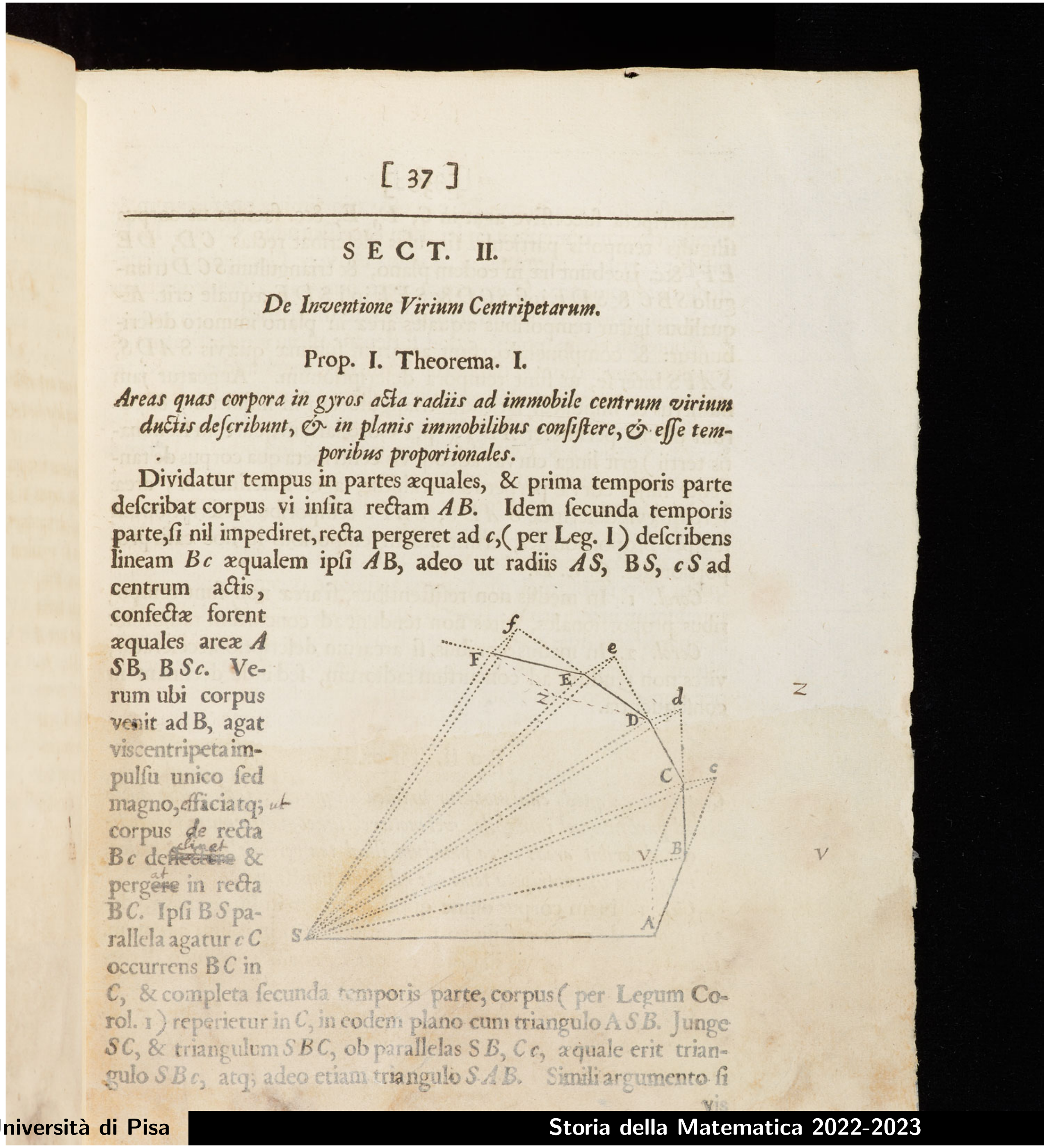
Infatti la differenza tra la figura inscritta e quella circoscritta è data dalla somma dei parallelogrammi *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, ossia (per l'uguaglianza delle loro basi) dal rettangolo costituito da una sola base *Kb* e dalla somma delle altezze *Aa*, cioè il rettangolo *ABla*. Ma questo rettangolo, in quanto la sua larghezza *AB* viene diminuita all'infinito, diventa minore di qualunque rettangolo dato. Di conseguenza (per il lemma I) la figura inscritta, quella circoscritta e, a maggior ragione, la figura curvilinea intermedia, diventeranno, da ultimo, uguali – C.V.D.

LEMMA VII.

Ferme restando le medesime cose, dico che l'ultima ragione fra l'arco, la corda e la tangente è, scambievolmente, una ragione di uguaglianza.

Infatti, mentre il punto B si accosta al punto A, si supponga sempre che AB e AD siano prolungati fino ai punti lontani b e d, e si tracci bd parallela alla seccante BD. Sia l'arco Acb sempre simile all'arco ACB; essendo stati congiunti i punti A e B, l'angolo dAb, per il lemma precedente, diventerà evanescente: allora, le rette sempre finite Ab e Ad, e l'arco intermedio Acb coincideranno, e per conseguenza saranno uguali. Per la qual cosa, le rette AB e AD e l'arco intermedio ACB, sempre proporzionali ai precedenti, diventeranno evanescenti e avranno per ultima ragione l'uguaglianza. – C.V.D.

I *Principia mathematica philosophiae naturalis*: Proposizione 1, Libro 1


[37]

SECT. II.

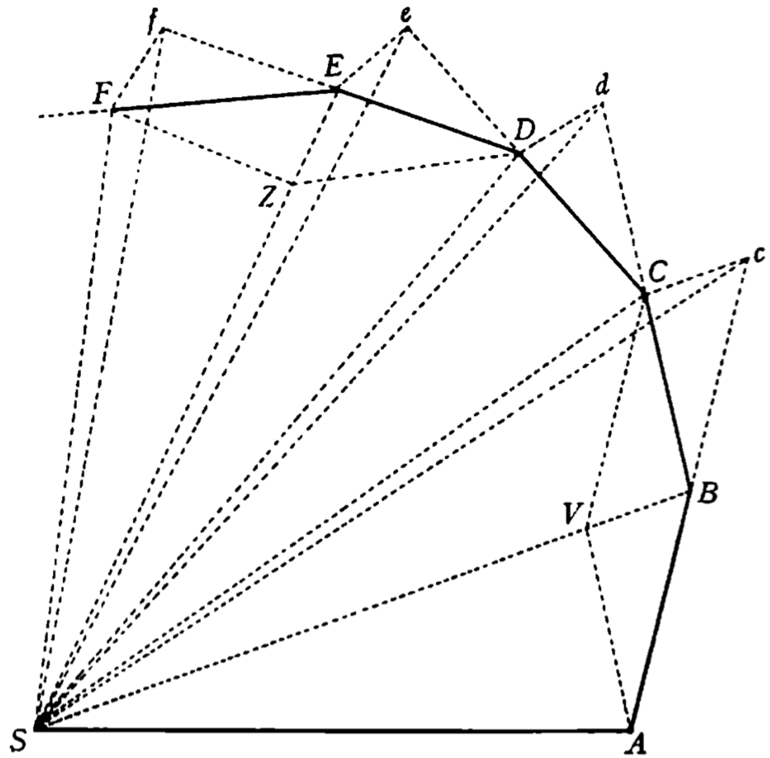
De Inventione Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

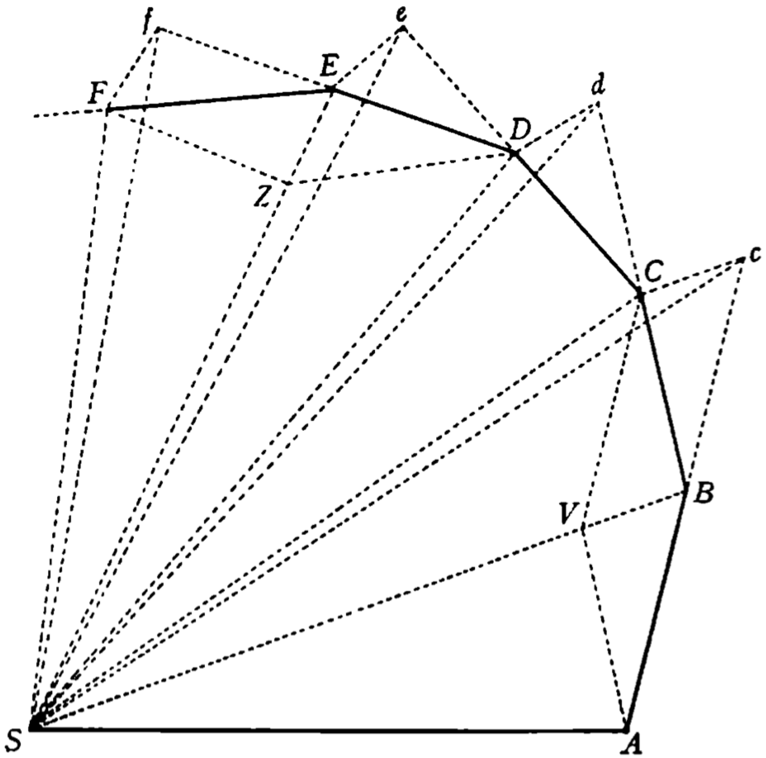
Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte deſcribat corpus vi inſita rectam *AB*. Idem ſecunda temporis parte, ſi nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I) deſcribens lineam *Bc* æqualem ipſi *A*B, adeo ut radiis *AS*, B*S*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *A S*B, B*Sc*. Verum ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulſu unico ſed magno, efficiatq; ut corpus de recta B*c* ~~deflectere~~ declinet & perg~~ere~~ at in recta B*C*. Ipſi B*S* parallela agatur *cC* occurrens B*C* in *C*, & completa ſecunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo A*SB*. Junge *SC*, & triangulum *SBC*, ob parallelas S*B*, C*c*, æquale erit triangulo *SBc*, atq; adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento ſi vis

"Le aree che i corpi ruotanti descrivono, con i raggi condotti verso il centro immobile delle forze, giacciono sugli stessi piani e sono proporzionali ai tempi"



“[. . .]. Si aumenti, ora, il numero dei triangoli e se ne diminuisca all’infinito la larghezza: il loro perimetro *ADF* (per il corollario 4 del lemma III) sarà una linea curva; perciò la forza centripeta per effetto della quale il corpo è deviato costantemente dalla tangente a questa curva, agisce continuamente, e le qualsiasi aree descritte *SADS*, *SAFS* sempre proporzionali ai tempi impiegati per descriverle, saranno anche in questo caso proporzionali agli stessi tempi.”



Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

- 1646 nasce a Lipsia
- 1662-64 si laurea in filosofia all'Università di Lipsia
- 1666 *De Arte Combinatoria*
- 1666 si dottora in legge, *Disputatio Inauguralis de Casibus Perplexis in Jure*
- 1666 incontra Johann von Boyneburg entra nella corte dell'Elettore di Magonza Johann von Schönborn
- 1672 Leibniz arriva a Parigi dove incontra Huygens.
- 1673 inverno primo viaggio di Leibniz a Londra
- 1673 morte di Johann von Boyneburg e di Johann von Schönborn (Leibniz cerca un nuovo impiego)
- 1676 lascia Parigi; secondo breve viaggio a Londra prima di assumere il ruolo di consigliere e bibliotecario alla corte degli Hannover
- 1676-1716 al servizio di John Frederik, Ernest Augustus e Georg Ludwig di Hannover (futuro Giorgio I)
- 1716 muore nel novembre ad Hannover

Leibniz: *Historia et origo calculi differentialis*, 1714

Utilissimum est cognosci veras inventionum memorabilium origines, praesertim earum, quae non casu sed vi meditandi innotuere. Id enim non eo tantum prodest, ut Historia literaria suum cuique tribuat et alii ad pares laudes invitentur, sed etiam ut augeatur ars inveniendi, cognita methodo illustribus exemplis. Inter nobiliora hujus temporis inventa habetur novum Analyseos Mathematicae genus, Calculi differentialis nomine notum, cujus etsi jam satis explicata habeatur constitutio, nondum tamen origo et inveniendi ratio publice habetur. Eum ante annos fere quadraginta invenit Autor, et nonum in annum pressum edidit ante annos fere triginta, ex quo celebratus est non elogiis tantum, sed et usu ipso, dum multa praeclara ejus ope inventa prostant, et praesertim in Actis Eruditorum Lipsiensibus [1], ac deinde in Academiae Scientiarum Regiae editis in lucem Commentariis [2] habentur, ut novam ex eo faciem Mathesis nacta videatur. Nemo autem de vero inventore dubitavit, donec nuper Anno domini 1712 quidam novi homines sive ignoratione rei literariae superiorum temporum sive invidia, sive inclarescendi per lites spe, sive denique adulatione, aemulum

Leibniz: *Historia et origo calculi differentialis*, 1714

E' cosa utilissima che le vere origini di invenzioni memorabili siano conosciute, specialmente quelle che furono concepite non per accidente ma attraverso uno sforzo di meditazione. L'utilità di tale conoscenza non è soltanto la possibilità di attribuire a ciascuno ciò che gli è dovuto e che altri siano spronati dalla speranza di una simile lode, ma anche che l'arte della scoperta (*ars inveniendi*) sia in questo modo promossa e che il metodo impiegato sia reso noto attraverso una serie di esempi significativi. Una delle più nobili invenzioni del nostro tempo è un nuovo tipo di analisi matematica, nota come calcolo differenziale; tuttavia, sebbene la sua sostanza sia stata adeguatamente esposta, la sua fonte e la sua originaria motivazione non sono ancora state rese pubbliche. Ormai quarant'anni sono trascorsi da quando il suo autore la inventò...

Somme e differenze: una fonte di ispirazione...

Osservazione del giovane Leibniz: data una successione $a_0, a_1, \ldots, a_n$, si consideri la successione dei termini consecutivi:

$$d_1 = a_1 - a_0, \quad d_2 = a_2 - a_1, \quad \ldots, \quad d_n = a_n - a_{n-1}$$

allora la somma di tali differenze sarà:

$$\sum_{i=1}^{n} d_n = a_n - a_0$$

Su sollecitazione di Huygens (1629-1695), che Leibniz conobbe a Parigi nei primi anni Settanta del Seicento, e alla luce di questa semplice osservazione che evidentemente può essere generalizzata al caso di successioni infinite (con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$), Leibiniz si propose di calcolare la somma dei reciproci dei numeri triangolari:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)/2}$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \dots \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \dots \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array} \tag{1}
$$

La successione dei numeri triangolari è ottenuta nella terza riga.

$$\begin{array}{cccccccc}
1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & \dots \\
1/2 & 1/6 & 1/12 & 1/20 & 1/30 & 1/42 & \dots & \dots \\
1/3 & 1/12 & 1/30 & 1/60 & 1/105 & \dots & \dots & \dots \\
1/4 & 1/20 & 1/60 & 1/140 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1/5 & 1/30 & 1/105 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array} \tag{2}$$

L'ennesimo elemento della seconda riga del triangolo armonico è: $1/n - 1/(n+1) = 1/n(n+1)$, cioè la metà del reciproco dell'ennesimo numero triangolare. Si noti che in ogni riga del triangolo armonico ogni termine è la differenza di due termini consecutivi della riga precedente: $1/3 = 1/2 - 1/6, 1/12 = 1/6 - 1/12, 1/30 = 1/12 - 1/20, \dots$

Il triangolo armonico di Leibniz

Poichè per costruzione del triangolo armonico si ha:

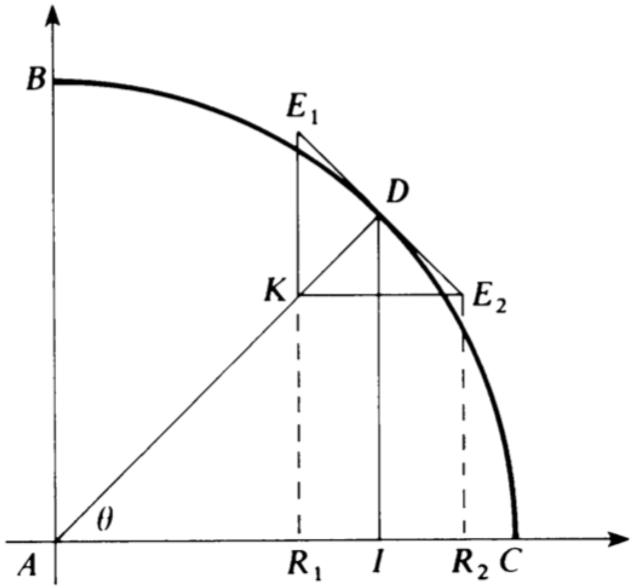
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots=1$$

si può concludere che:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots=2$$

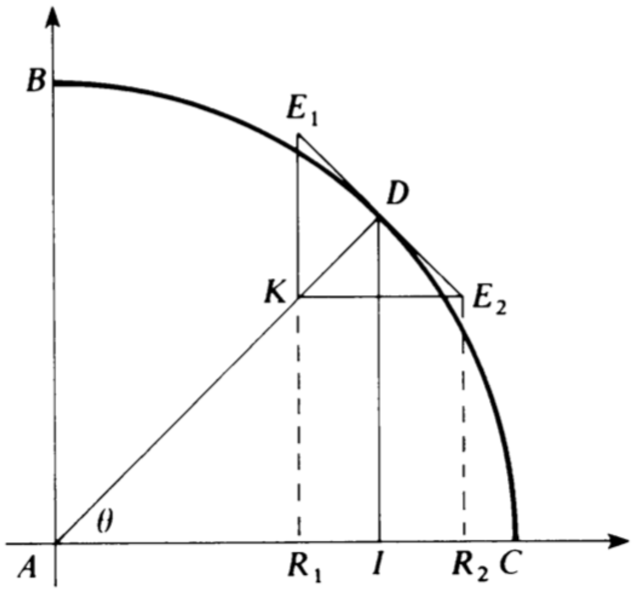
Sed reversus ex Anglia in Galliam A. D. 1673 fatis interim functo Eminentissimo Electore Moguntino, cujus gratia Moguntiae obhaeserat, jam liberior hortante Hugenio coepit tractare Analysin Cartesii (antea vix eminus salutatam) et ut in Geometriam Quadraturarum introduceretur, Honorati Fabri[25] Synopsin Geometricam, Gregorium a S. Vincentio[26], et Dettonvillaei (id est Pascalii)[27] libellum consuluit. Porro ex uno quodam exemplo Dettonvillaei lux ei subito oborta est, quam ipse Pascalius (quod mireris) inde non hauserat. Nam dum ille demonstrat Theorema Archimedeum de superficie sphaerae aut ejus partium mensuranda, utitur methodo, qua omnis solidi rotatione circa axem aliquem descripti superficies ad proportionalem figuram planam revocari potest. Tale enim inde noster sibi paravit theorema generale: Rectae perpendicularis ad curvam portiones interceptae inter axem et curvam, ordinatim et normaliter applicatae ad axem, dant figuram momento curvae ex axe proportionalem. Id cum monstrasset Hugenio, valde is probavit, fassusque est, hujus ipsius theorematis ope se superficiem Conoidis parabolici, aliarumque hujusmodi superficierum in opere de Horologio oscillatorio sine demonstratione positarum, ante multos annos reperisse. His noster excitatus, animadversa foecunditate harum meditationum, cum prius infinite parva tantum ut intervalla ordinatarum Cavalleriano more considerasset, commentus est Triangulum, quod vocavit characteristicum $_1YD_2Y$ (Fig. 1.),

Il triangolo caratteristico di Pascal



Il riferimento a Pascal è al *Trattato sui seni di un quadrante di cerchio* che è parte della prima lettera di Dettonville. La proposizione 1 di tale trattato recita: “la somma dei seni di un qualunque arco di quadrante è uguale alla porzione della base tra i seni estremi moltiplicata per il raggio”.

Il triangolo caratteristico di Pascal



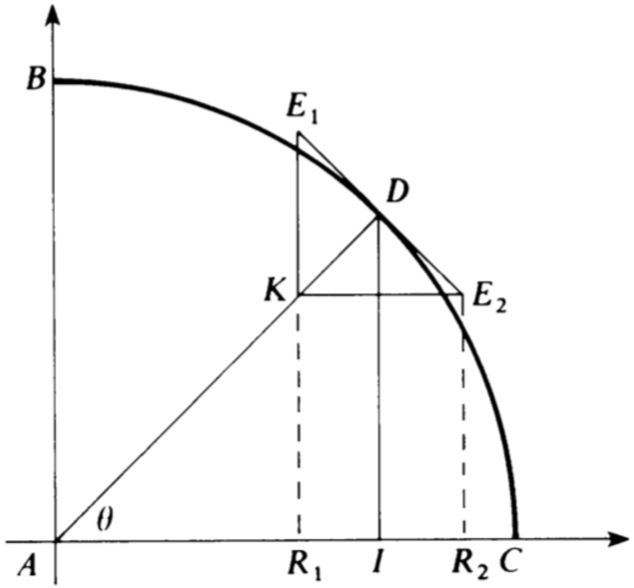
Pascal costruisce il triangolo rettangolo E_1E_2K con ipotenusa tangente alla circonferenza nel punto D. Pascal notò che i triangoli E_1E_2K e ADI sono simili. Ne deriva che:

$$\frac{AD}{E_1E_2} = \frac{DI}{E_2K}, \qquad \text{e quindi: } DI \cdot E_1E_2 = AD \cdot E_2K = AD \cdot R_1R_2.$$

Ponendo $y = DI, a = AD, \Delta s = E_1E_2, \Delta x = R_1R_2$, si ha: $y\Delta s = a\Delta x$. Riguardando Δs e Δx come indivisibili, si può scrivere che:

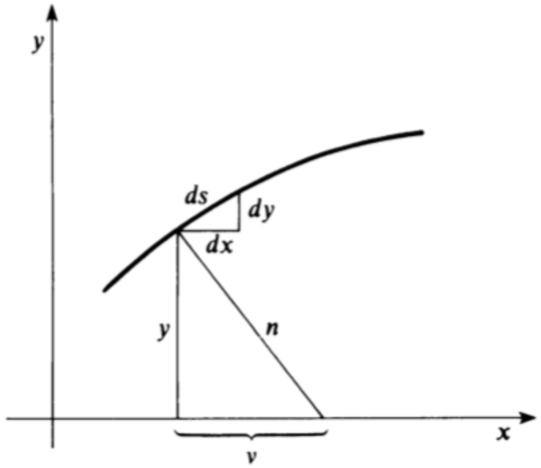
$$\int y ds = \int a dx.$$

Il triangolo caratteristico di Pascal



Ora, $2\pi y ds$ è l'area di una zona sferica; dunque l'area della emisfera è:

$$A = \int 2\pi y ds = 2\pi a \int_0^a dx.$$



La similitudine dei triangoli in figura implica:

$$\frac{ds}{n} = \frac{dx}{y} \text{ o equivalentemente: } yds = ndx$$

La relazione veniva impiegata da Leibniz per calcolare la superficie laterale di un solido ottenuto per rotazione della curva assegnata intorno all'asse x, in termini odierni: $A = 2\pi \int yds$ (Verificare!).

Il triangolo caratteristico di Leibiniz: altre applicazioni

- "il momento di una data curva rispetto all'asse delle x eguaglia l'area di una seconda curva la cui ordinata è la normale alla curva data".
- rettificazione delle curve
- quadrature

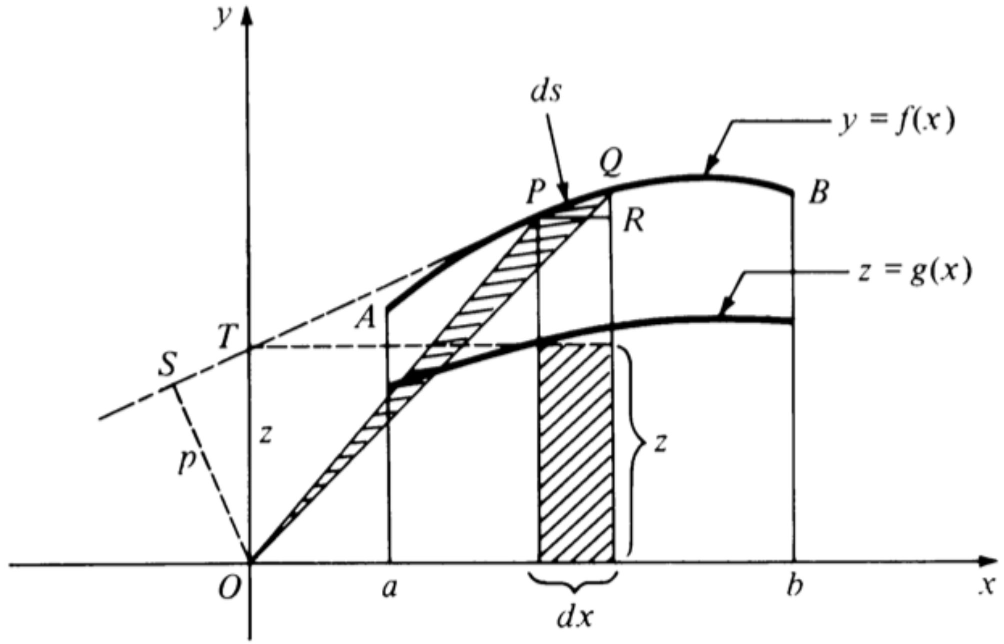
Rispetto a quest'ultimo problema, osserviamo che dalla figura precedente (in conseguenza della similitudine dei triangoli) si ha:

$$\int \nu \mathrm{d}x = \int y \mathrm{d}y, \qquad \nu \text{ indica la sottonormale.}$$

"[...] itaque figura orta ex subperpendicularibus ordinatim et perpendiculariter axi applicatis semper aequatur dimidio quadrato ordinatae. Et proinde, data figura quadranda, quaeritur figura cujus subperpendiculares aequentur ordinatis figurae datae, ea erit figurae datae quadratrix." *Historia et Origo, p. 9*

My method is but a corollary of a general theory of transformations, by the help of which any given figure whatever, by whatever equation it may be accurately stated, is reduced to another analytically equivalent figure . . . Furthermore, the general method of transformations itself seems to me proper to be counted among the most powerful methods of analysis, for not merely does it serve for infinite series and approximations, but also for geometrical solutions and endless other things that are scarcely manageable otherwise · · · The basis of the transformation is this: that a given figure, with innumerable lines [ordinates] drawn in any way (provided they are drawn according to some rule or law), may be resolved into parts, and that the parts—or others equal to them—when reassembled in another position or another form compose another figure, equivalent to the former or of the same area even if the shape is quite different; whence in many ways the quadratures can be attained · · · These steps are such that they occur at once to anyone who proceeds methodically under the guidance of Nature herself; and they contain the true method of indivisibles as most generally conceived and, as far as I know, not hitherto expounded with sufficient generality. For not merely parallel and convergent straight lines, but any other lines also, straight or curved, that are constructed by a definite law can be applied to the resolution [of the original figure into parts that are to be reassembled to form another figure]; but he who has grasped the universality of the method will judge how great and how abstruse are the results that can thence be obtained: For it is certain that all squarings hitherto known, whether absolute or hypothetical, are but limited specimens of this.

Principio di Trasmutazione



Posto, $z = y - x\dfrac{dy}{dx}$, Leibniz dimostra un risultato equivalente alla seguente relazione:

$$\int_a^b y dx = \frac{1}{2}[xy]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b z dx.$$

Vi è l'idea di istituire un paragone quasi una analogia nel continuo con il comportamento nel discreto (successioni numeriche e successioni di differenze)

$$\frac{\overline{\text{omn. } l}^2}{2} = \text{omn. } \overline{\overline{\text{omn. } l}\,\frac{l}{a}}$$

$$\frac{1}{2}\left(\int dy\right)^2 = \int\left(\int dy\right) dy$$

La notazione l viene presto sostituita da $\frac{l}{d}$ e quindi da y. Così anche *omn*, viene rimpiazzata da un "esse" allungata $\int$.

MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MI-nimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & ſingulare pro illis calculi genus, per G.G. L.

SIt axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur reſpective, *v*, vv, y, z; & ipſa AX abſciſſa ab axe, vocetur x. Tangentes ſint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes reſpective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio aſſumta vocetur dx, & recta quæ ſit ad dx, ut *v* (vel vv, vel y, vel z) eſt ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur d *v* (vel d vv, vel dy vel dz) ſive differentia ipſarum *v* (vel ipſarum vv, aut y, aut z) His poſitis calculi regulæ erunt tales: TAB. XII.

Sit a quantitas data conſtans, erit da æqualis o, & d $\overline{\text{ax}}$ erit æqu. a dx: ſi ſit y æqu. *v* (ſeu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ reſpondenti curvæ VV) erit dy æqu. d*v*. Jam *Additio & Subtractio:* ſi ſit z -y † vv † x æqu. *v*, erit d $\overline{\text{z--y † vv † x}}$ ſeu d*v*, æqu. dz--dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, d $\overline{\text{x}v}$ æqu. x d*v* † *v* dx, ſeu poſito y æqu. x*v*, fiet d y æqu. x d *v* † *v* dx. In arbitrio enim eſt vel formulam, ut x*v*, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum ſua differentiali. Notandum etiam non dari ſemper regreſſum

La prima pubblicazione sul calcolo: 1684, *Acta Eruditorum*

Gottfried Wilhelm Leibniz: Nuovo metodo per i massimi e minimi come pure per le tangenti che non si arresta davanti a quantità frazionarie e irrazionali, ed un singolare genere di calcolo per quei problemi (1684)[1]

Sia dato l'asse AX, e piú curve come VV, WW, YY, ZZ, e le ordinate di un loro punto, normali all'asse, siano VX, WX, YX, ZX: queste si dicono rispettivamente v, w, y, z; ed il segmento AX, tagliato sull'asse, sia detto x. Le tangenti siano VB, WC, YD, ZE, le quali incontrano l'asse rispettivamente nei punti B, C, D, E [v. fig. 18*b*].[2]

Ora un segmento, preso ad arbitrio, sia detto dx[3] ed un segmento (v. fig. 18*a*) che sta a dx, come v (o w, o y, o z) sta a BX (o CX, o DX, o EX) sia detto dv (o dw, o dy, o dz) ossia differenza delle stesse v (o delle stesse w, o y, o z).

Ciò posto, le regole del calcolo saranno queste:

Sia a una quantità data costante, sarà

$$da = 0 \quad \text{e} \quad dax = adx.$$

Se abbiamo $y = v$ (ossia se un'ordinata qualsiasi della curva YY, è uguale ad una qualsiasi ordinata corrispondente della curva VV), sarà: $dy = dv$ [v. fig. 18].

Addizione e sottrazione:

se si ha

$$z - y + w + x = v,$$

sarà

$$d(z - y + w + x) = dv = dz - dy + dw + dx.$$

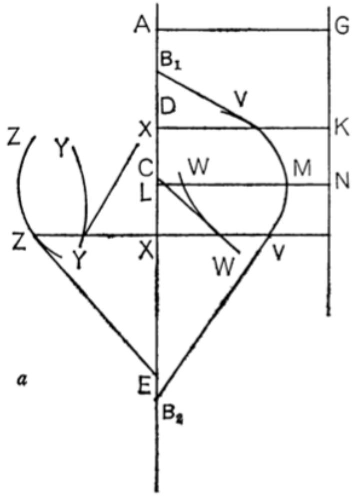
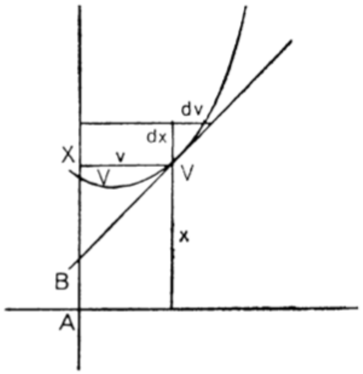


Fig. 18*a*



$BX : v = dx : dv$

Fig. 18*b*

Moltiplicazione:

$$dxv = xdv + vdx,$$

ovvero, posto

$$y = xv,$$

sarà

$$dy = xdv + vdx.$$

Infatti è ad arbitrio impiegare un'espressione come xv, oppure brevemente una sola lettera come y.

È da notarsi che in questo calcolo si trattano nello stesso modo tanto x come dx, tanto y quanto dy, o un'altra qualsiasi lettera indeterminata come il suo differenziale.

È anche da notarsi che non sempre può darsi il procedimento inverso a partire da un'equazione differenziale, se non con una certa cautela di cui si dirà altrove.

Divisione:

posto

$$z = \frac{v}{y}$$

si ha

$$d\frac{v}{y} = dz = \frac{\pm vdy \mp ydv}{y^2}.$$

Quanto ai *segni*[4] è da notarsi ora questo: quando viene sostituito alla lettera semplicemente il suo differenziale, si devono conservare gli stessi segni, e scrivere $+dz$, in luogo di $+z$ e $-dz$, in luogo di $-z$, come appare dall'addizione e dalla sottrazione esposta poco prima. Ma quando si viene alla discussione dei valori, o quando viene considerata la relazione di z con x, appare allora se dz è una quantità positiva o minore di zero, ossia negativa; in quest'ultimo caso, la tangente ZE si conduce dal punto Z non verso A, ma in direzione opposta, ossia al disotto di X, e ciò accade quando le stesse ordinate z decrescono mentre crescono le x.

E poiché le stesse ordinate v, ora crescono ed ora decrescono, dv sarà una quantità talora positiva e talora negativa: nel primo caso la tangente V_1B_1[5] viene condotta verso A e nell'altro V_2B_2[6] in direzione opposta.

Né un caso, né l'altro si presenta poi nel mezzo in M, nel quale punto le stesse v né crescono né decrescono, ma sono stazionarie, e cosí è $dv = 0$, dove non importa che la quantità sia positiva o negativa, poiché $+0 = -0$; ed ivi la stessa v, vale a dire l'ordinata LM, è *massima* (se volgesse la convessità all'asse sarebbe *minima*), e la tangente alla curva in M né si conduce al disopra di X verso A quivi avvicinandosi all'asse, né sotto X in direzione opposta, ma risulta parallela all'asse.

Se dv è infinito rispetto a dx, allora la tangente è perpendicolare all'asse, ossia è l'ordinata stessa.

Se dv e dx sono uguali, la tangente forma un angolo semiretto con l'asse.

Se crescendo le ordinate v crescono pure gli stessi loro incrementi, o i differenziali dv (ossia se presi i dv positivi anche i d^2v, differenza delle differenze, sono positivi, e se [i dv] negativi, [anche i d^2v sono] negativi) la curva volge all'asse la sua *concavità*, o, nel caso contrario, la sua *convessità*; dove però è massimo o minimo l'incremento, o dove gl'incrementi da decrescenti divengono crescenti, o viceversa, ivi è un *punto di flesso*: concavità e convessità si scambiano fra loro, purché però nello stesso punto le ordinate da decrescenti non divengano crescenti o viceversa; allora infatti la concavità o la convessità rimarrebbe; non può invece accadere che gl'incrementi continuino a crescere o a decrescere, ma le ordinate diventino da crescenti decrescenti o viceversa.

Si trova quindi un punto di flesso quando d^2v è zero, mentre v e dv sono diversi da zero. Cosicché nel problema del flesso si hanno tre radici eguali, e non due sole come nel problema della massima ordinata.

In tutti questi calcoli occorre un retto uso dei segni.

Talvolta poi sono da adoperarsi i *segni ambigui*, come si è detto nella divisione, prima cioè che risulti come debbono essere interpretati.

E invero se crescono (o decrescono) le $\frac{v}{y}$, i segni ambigui in $d\frac{v}{y}$ ossia in $\frac{\pm vdy \mp ydv}{y^2}$ devono interpretarsi in modo che la frazione sia una quantità positiva (o negativa). Inoltre $\mp$ significa il contrario di $\pm$, in modo che se questo è $+$ quello sia $-$, e viceversa.

Possono pure in uno stesso calcolo, presentarsi piú ambiguità, che distinguo per mezzo di parentesi; ad esempio se fosse

$$\frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v} = w$$

sarebbe:

$$\frac{\pm vdy \mp ydv}{y^2} + \frac{(\pm)\, ydz\, (\mp)\, zdy}{z^2} + \frac{(\pm)\, xdv\, (\mp)\, vdx}{v^2} = dw\,;$$

altrimenti le ambiguità sorte da espressioni diverse si confonderebbero. E qui è da notarsi che una quantità avente segno ambiguo, moltiplicata per se stessa dà un risultato positivo, per il suo contrario negativo, per un'altra di segno ambiguo forma una nuova ambiguità che dipende da entrambe.

Potenza:

$$dx^a = ax^{a-1}\,dx\,;$$

ad esempio:

$$dx^3 = 3x^2dx\,.$$

$$d\frac{1}{x^a} = -\frac{adx}{x^{a+1}}\,;$$

ad esempio:

se è $$w = \frac{1}{x^3}\,,$$

sarà $$dw = -\frac{3dx}{x^4}\,.$$

La prima pubblicazione sul calcolo: 1684, *Acta Eruditorum*

Radice:

$$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\,dx\sqrt[b]{x^{a-b}}.$$

(Di qui si deduce che:

$$d\sqrt{y} = \frac{dy}{2\sqrt{y}},$$

poiché in questo caso a è uguale a 1, e b è uguale a 2; dunque $\frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}$ viene ad essere uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{y^{-1}}$, e $y^{-1} = \frac{1}{y}$ per la natura degli esponenti della progressione geometrica, e $\sqrt{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}$)

$$d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = \frac{-\,adx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}.$$

Sarebbe invero bastata la regola della potenza numerica intera per determinare i differenziali tanto delle frazioni come delle radici; la potenza infatti diviene una frazione quando l'esponente è negativo, e si muta in radice quando l'esponente è frazionario: ma ho preferito dedurre io stesso queste conseguenze piuttosto che lasciarle ad altri da dedurre, dal momento che sono assai generali e s'incontrano spesso, e in un argomento per sé stesso complesso è preferibile pensare alla facilità.

Dalla conoscenza di questo particolare *algoritmo*, o di questo calcolo, che io chiamo *differenziale*, tutte le altre equazioni differenziali possono ricavarsi per mezzo del calcolo comune, ed ottenersi i massimi e i minimi, come pure le tangenti, in modo che non sia necessario far sparire le frazioni o gl'irrazionali, od altri vincoli, come tuttavia si doveva fare, secondo i metodi sin'ora pubblicati.

La dimostrazione di tutte le regole esposte, sarà facile per chi è versato in questi studii, ed una cosa sola non è stata sin qui spiegata a sufficienza: che cioè si possano avere dx, dy, dv, *dw*, *dz*, proporzionali alle differenze o agl'incrementi o alle diminuzioni momentanee di *x*, *y*, *v*, *w*, *z* (rispettivamente).

Quindi, data una equazione qualsiasi, si può scrivere la sua equazione differenziale, in questo modo.

Per ogni *termine*, (ossia per ogni parte che concorre a formare l'equazione per sola addizione o sottrazione) si sostituirà semplicemente la quantità differenziale del termine; e invece per un'altra quantità (che non sia un termine, ma concorra a formare un termine) s'impiegherà la sua quantità differenziale, per formare la quantità differenziale del termine stesso non semplicemente, ma secondo l'algoritmo precedentemente stabilito.

Invero i metodi pubblicati sin'ora non presentano questo passaggio, impiegano infatti per lo piú un segmento, come DX o un altro analogo, ma non il segmento *dy*, che è il quarto proporzionale dopo DX, XY, *dx*, ciò che confonde tutto; in conseguenza di queste loro premesse, prescrivono d'eliminare prima le quantità frazionarie e irrazionali (che entrano indeterminate).

È pure evidente che il nostro metodo si estende alle linee trascendenti, che non si possono ricondurre al calcolo algebrico, o che non sono di grado determinato; e ciò in un modo generalissimo, senza ricorrere ad alcuna supposizione particolare che non sempre si verifica; purché si ritenga in genere, che trovare la *tangente* è condurre una retta che congiunga due punti aventi una distanza infinitamente piccola, o tracciare il lato prolungato di un poligono infinitangolo che per noi equivale alla *curva*. Quella distanza infinitamente piccola, è sempre nota per mezzo di qualche differenziale come *dv*, o può essere espressa per mezzo di una relazione con questo, cioè per via di una certa tangente nota.

In particolare,[7] se *y* è una quantità trascendente, ad esempio un'ordinata della cicloide, ed essa entra in un calcolo per mezzo del quale si determina l'ordinata z di un'altra curva e si cerca dz, ovvero per mezzo di questo si cerca la tangente di quest'ultima curva, sarebbe da determinarsi dz per mezzo di dy, si avrebbe poi dy, poiché si ha la tangente della cicloide.

Se poi si suppone di non avere ancora la tangente della cicloide, similmente si potrebbe trovare con il calcolo, da una proprietà nota delle tangenti del cerchio.

Mi piace poi di proporre un esempio di questo calcolo, dove, si noti, io indico la divisione in questo modo: $x : y$, ciò che è lo stesso che x diviso per y o $\dfrac{x}{y}$.[8]

Sia l'equazione 1ª o data:

$$x : y + (a + bx) \cdot (c - x^2) : (ex + fx^2)^2 +$$
$$+ ax\sqrt{g^2 + y^2} + y^2 : \sqrt{h^2 + lx + mx^2} = 0,$$

la quale esprime una relazione tra x ed y, ossia tra AX e XY, posto che a. b, c, d, e, f, g, h, l, m siano quantità date; si cerca il modo di condurre da un dato punto Y, la tangente YD alla curva ossia si cerca il rapporto del segmento DX al segmento dato XY. Per brevità poniamo:

$$a + bx = n, \quad c - x^2 = p, \quad ex + fx^2 = q,$$
$$g^2 + y^2 = r, \quad h^2 + lx + mx^2 = s,$$

ed avremo:

$$x : y + np : q^2 + ax\sqrt{r} + y^2 : \sqrt{s} = 0.$$

Lettera di Jacob Bernoulli a Leibniz:
Therefore I believe that you, Messer, are concealing here the traces of a more sublime form of mathematics that I have not yet succeeded in penetrating using common Cartesian analysis. I wish to learn about the mathematics by means of which you and Messer Tschirnhaus have discovered so many and such important things on the squaring of the circle and on the dimensions of other curves. If you will deem me worthy of partaking a ray of light of your method (that I most dearly wish), to the extent allowed by your very important commitments, once I have been informed of your discoveries, I will become not only a simple admirer, but your most devoted appraiser and propagator. (Jacob Bernoulli to Leibniz, 15 December 1687, Gerhardt 1849-1863, vol. 3, 13).

Johann Bernoulli nella sua autobiografia scrive:
After this beginning, by pure chance, my brother and I ran into a short essay by Mr. Leibniz in the 1684 Leipzig Acta, where in barely five or six pages he sketched a very vague idea of differential calculus, which was more an enigma than an explanation; however, this was sufficient for us to grasp the entire secret in a few days. Evidence of this is found in our later publications on infinitesimals. (Wolf 1848, 218-219)

La ricezione del calcolo da parte di Huygens

Huygens a Leibniz, 24 Agosto 1690:
Ho visto di tanto in tanto qualcosa del Vostro nuovo calcolo Algebrico negli Atti di Lipsia, ma trovandovi delle oscurità, non l'ho sufficientemente studiato per capirlo.
Huygens a Leibniz, 9 Ottobre 1690:
Ho cercato dopo la mia citata lettera di capire il vostro calcolo differenziale e ho così insistito che capisco ora, ma soltanto dopo due giorni, gli esempi che ne avete dati, l'uno sulla cicloide, che si trova nella vostra lettera [vedi ad esempio lettera di Leibniz a Huygens, 11 Luglio 1690], l'altro nella ricerca del Teorema del signor Fermat, che è nel Giornale di Lipsia del 1684. E ho anche riconosciuto i fondamenti di questo calcolo, e di tutto il vostro metodo, che io stimo molto buono e molto utile.

Leibniz e il calcolo integrale: *De Geometria Recondita*, 1686

G. G. L. DE GEOMETRIA RECONDITA ET *Analyſi Indiviſibilium atque infinitorum, Addenda his quæ dicta ſunt in Actis a. 1684, Maji p. 233; Octob. p. 264; Decemb. p. 586.*

Cum intelligam nonnulla, quæ in his Actis ad Geometriæ profectum publicavi, non mediocriter a viris quibusdam doctis probari, quin & paulatim in uſum transferri, quædam tamen, ſive ſcribentis vitio, ſive aliam ob cauſam ab aliquibus non ſatis fuiſſe percepta, ideo pretium operæ putavi hoc loco adjicere, quæ illuſtrare priora poſſint. Accepi nimirum tractatum *Dn. Craigii* de dimenſione figurarum, Londini anno ſuperiore editum, ex quo ſane apparet, autorem non contemnendos in Geometria interiore progreſſus feciſſe. Is quidem valde approbat diſtinctionem a me aliquoties inculcatam, inter *dimenſiones figurarum generales & ſpeciales*, quam pag. 1 ait optime nuper a Geometris fuiſſe obſervatam, & neglectioni hujus diſtinctionis paralogismos complures tetragonismi impoſſibilitatem probare conantium, recte tribuit. Mecum etiam figuras, quas vulgo e Geometria rejiciunt, agnoſcit eſſe *Tranſcendentes* pag. 26; Methodum quoque *Tangentium* a me in Actis Octobr. 1684 publicatam, pro humanitate ſua plurimum laudat pag. 27 & 29, tanquam præſtantiſſimam & cujus ope Methodus dimenſionum valde juvetur, Porro quoniam ad problemata Tranſcendentia, ubicunque dimenſiones tangentesque occurrunt, calculo tractanda, vix quicquam utilius, brevius, univerſalius fingi poteſt *calculo* meo *differentiali* ſeu *analyſi indiviſibilium atque infinitorum*, cujus exiguum tantum velut ſpecimen

MENSIS JUNII A. M DC LXXXVI. 297

ſpecimen ſive corollarium continetur in Methodo illa mea Tangentium in Actis Octobr. 84 edita, & Dn. Craigio tantopere probata; & ipſe Dn. Craigius ſuſpicatus eſt, aliquid altius in ea latere, ac proinde pag. 29 ſui libelli inde derivare conatus eſt theorema Barrovianum (quod ſumma intervallorum, inter ordinatas & curvæ perpendiculares in axe ſumtorum, & ad axem applicatorum, æquetur ſemiquadrato ordinatæ ultimæ) in cujus executione tamen nonnihil a ſcopo deflexit, quod in nova methodo non miror; ideo gratiſſimum ipſi aliisq; fore arbitror, *ſi hoc loco aditum rei, cujus tam late patet utilitas, patefecero*. Nam inde omnia hujusmodi theoremata ac problemata, quæ admirationi merito fuere, ea facilitate fluunt, ut jam non magis ea diſci teneriq; neceſſe ſit, quam plurima vulgaris Geometriæ theoremata illi ediſcenda ſunt, qui ſpecioſam tenet. Sic ergo in caſu prædicto procedo. Sit ordinata x, abſciſſa y, intervallum inter perpendicularem & ordinatam quod dixi ſit p, patet ſtatim methodo mea fore pdy $=$ xdx quod & Dn. Craigius ex ea obſervavit; qua æquatione differentiali verſa in ſummatricem, fit ſpdy $=$ ſxdx. Sed ex iis quæ in methodo tangentium expoſui, patet eſſe d, $\frac{1}{2}$ xx $=$ xdx; ergo contra $\frac{1}{2}$ xx $=$ ſxdx (ut enim poteſtates & radices in vulgaribus calculis, ſic nobis ſummæ & differentiæ ſeu ſ & d, reciprocæ ſunt). Habemus ergo ſpdy $=$ $\frac{1}{2}$ xx. Quod erat dem. Malo autem dx & ſimilia adhibere, quam literas pro illis, quia iſtud dx eſt modificatio quædam ipſius x