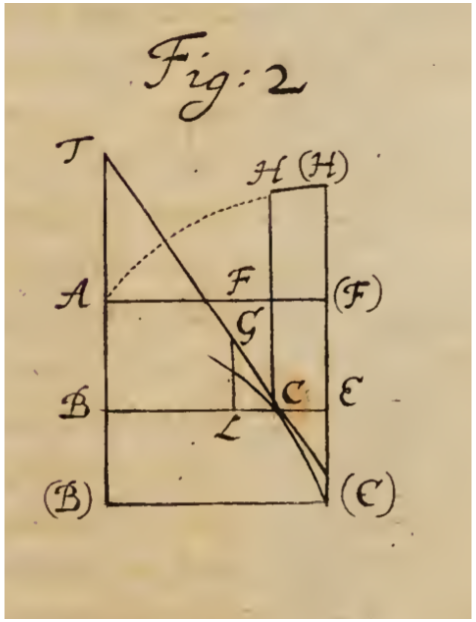
ſpdy $= \frac{1}{2}$ xx. Quod erat dem. Malo autem dx & ſimilia adhibere, quam literas pro illis, quia iſtud dx eſt modificatio quædam ipſius x, & ita ope ejus fit, ut ſola quando id fieri opus eſt litera x, cum ſuis ſcilicet poteſtatibus & differentialibus calculum ingrediatur, & relationes tranſcendentes inter x & aliud exprimantur. Qua ratione etiam lineas tranſcendentes æquatione explicare licet, verbi grat. Sit arcus a, ſinus verſus x, fiet $a = \int dx : \sqrt{2x - xx}$, & ſi cycloidis ordinata ſit y, fiet $y = \sqrt{2x - xx} + \int dx : \sqrt{2x - xx}$, quæ æquatio perfecte exprimit relationem inter ordinatam y & abſciſſam x, & ex ea omnes cycloidis proprietates demonſtrari poſſunt; promotusque eſt hoc modo calculus analyticus ad eas lineas, quæ non aliam magis ob cauſam hactenus excluſæ ſunt, quam quod ejus incapaces crederentur: Interpolationes quoque Wallisianæ & alia innumera hinc derivantur.

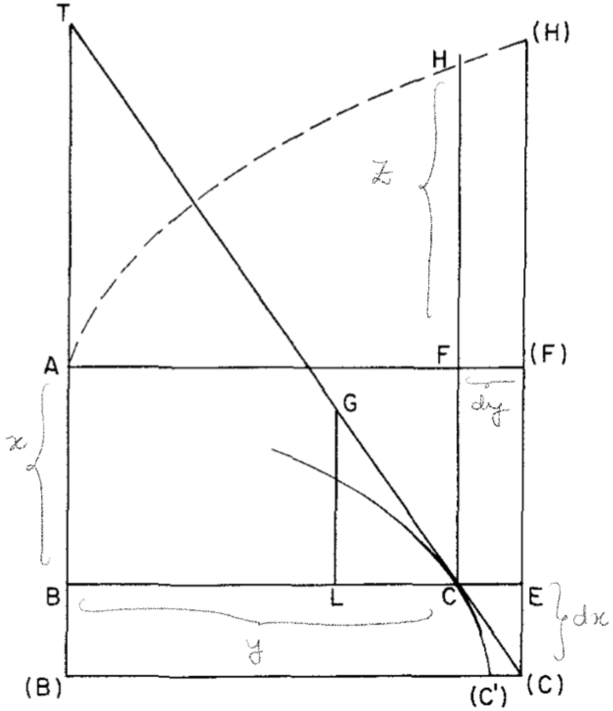
Quod ſupereſt, ne nimium mihi aſcribere aut detrahere aliis

Qq 3 videar,

TAB. V. Fig. 2.

Oſtendam autem *problema generale Quadraturarum reduci ad inventionem lineæ datam habentis legem declivitatum*, ſive in qua latera Trianguli characteriſtici aſſignabilis datam inter ſe habeant relationem, deinde oſtendam hanc lineam per motum a nobis excogitatum deſcribi poſſe. Nimirum in omni curva C (C) (*figur. 2*) intelligo *triangulum characteriſticum* duplex: aſſignabile TBC, & inaſſignabile GLC, ſimilia inter ſe. Et quidem *inaſſignabile* comprehenditur ipſis GL, LC, elementis coordinatarum CB, CF, tanquam cruribus, & GC, elemento arcus, tanquam baſi ſeu hypotenuſa. Sed *aſſignabile* TBC comprehenditur inter axem, ordinatam, & tangentem, exprimitque adeo angulum, quem directio curvæ (ſeu ejus tangens) ad axem vel baſin facit, hoc eſt curvæ declivitatem in propoſito puncto C. Sit jam zona quadranda F(H) comprehenſa inter curvam H(H), duas rectas parallelas FH & (F)(H) & axem F(F) in hoc Axe ſumto puncto fixo A, per A ducatur ad AF normalis AB tanquam axis conjugatus, & in quavis HF (producta prout opus) ſumatur punctum C: ſeu fiat linea nova C(C) cujus hæc ſit natura, ut ex puncto





La curva $AH(H)$ è la curva che si intende quadrare. Leibniz introduce la curva cosiddetta *quadratrice* così definita:

$$\frac{TB}{BC} = \frac{HF}{a}, \quad a \text{ è una lunghezza assegnata.}$$

Si ha: $a \cdot E(C) = adx = zdy$, da cui si ricava: $AFHA = \int zdy = ax$.


JOHANNES BERNOULLI
Son Esprit vit la vérité,
Et son cœur connut la justice,
Il a fait l'honneur de la Suisse
Et celui de l'humanité.
A Lausanne et Geneve, chez Marc-Michel Bousquet et Comp.

Johann Bernoulli (1667-1748): lezioni sul calcolo integrale (1742)

LECTIONES MATHEMATICÆ

DE

METHODO INTEGRALIUM,

ALIISQUE.

LECTIO PRIMA.

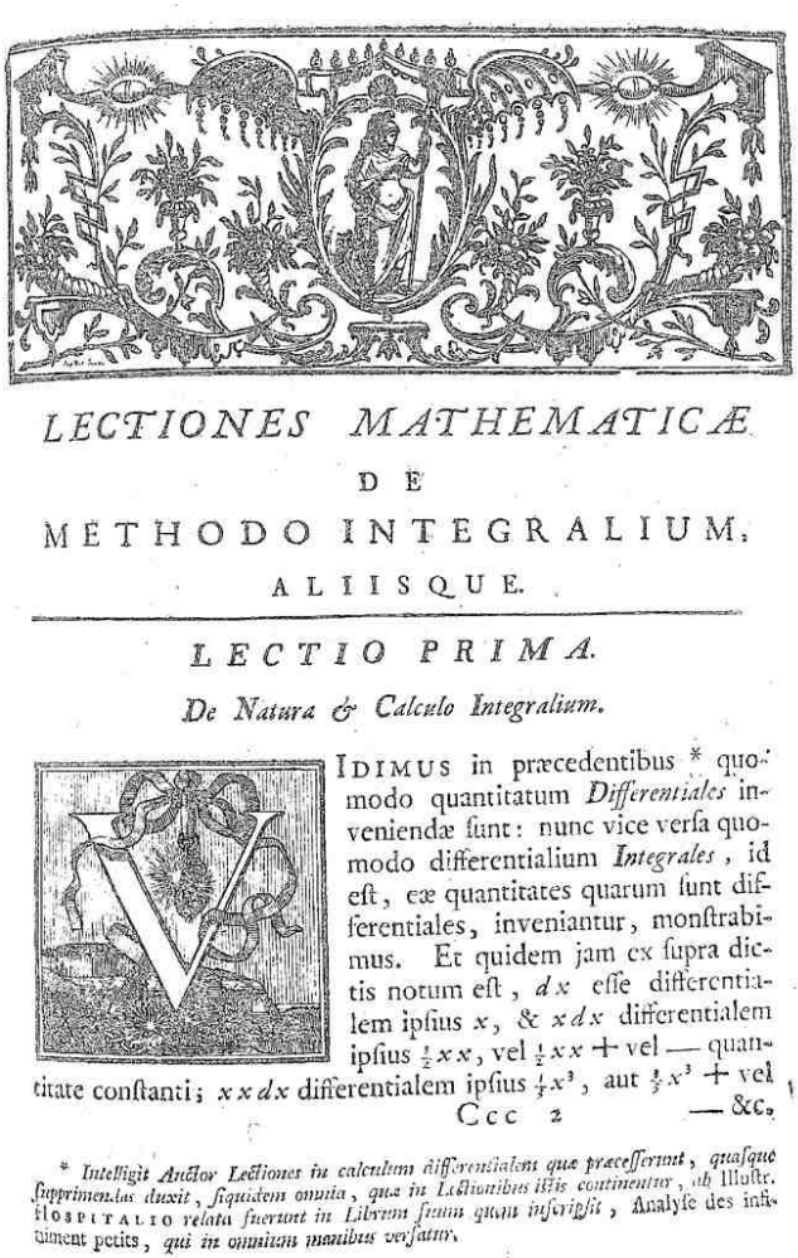
De Natura & Calculo Integralium.

VIDIMUS in præcedentibus * quomodo quantitatum *Differentiales* inveniendæ ſunt: nunc vice verſa quomodo differentialium *Integrales*, id eſt, eæ quantitates quarum ſunt differentiales, inveniantur, monſtrabimus. Et quidem jam ex ſupra dictis notum eſt, dx eſſe differentialem ipſius x, & xdx differentialem ipſius $\frac{1}{2}xx$, vel $\frac{1}{2}xx$ + vel — quantitate conſtanti; $xxdx$ differentialem ipſius $\frac{1}{3}x^3$, aut $\frac{1}{3}x^3$ + vel — &c.

Ccc 2

* *Intelligit Auctor Lectiones in calculum differentialem quæ præceſſerunt, quaſque ſupprimendas duxit, ſiquidem omnia, quæ in Lectionibus iſtis continentur, ab* Illuſtr. HOSPITALIO *relata fuerunt in Librum ſuum quem inſcripſit,* Analyſe des infiniment petits, *qui in omnium manibus verſatur.*

Johann Bernoulli (1667-1748): lezioni sul calcolo integrale (1742)



LECTIONES MATHEMATICÆ

DE

METHODO INTEGRALIUM,

ALIISQUE.

LECTIO PRIMA.

De Natura & Calculo Integralium.

VIDIMUS in præcedentibus * quomodo quantitatum *Differentiales* inveniendæ sunt: nunc vice versa quomodo differentialium *Integrales*, id est, eæ quantitates quarum sunt differentiales, inveniantur, monstrabimus. Et quidem jam ex supra dictis notum est, dx esse differentialem ipsius x, & xdx differentialem ipsius $\frac{1}{2}xx$, vel $\frac{1}{2}xx$ + vel — quantitate constanti; $xxdx$ differentialem ipsius $\frac{1}{3}x^3$, aut $\frac{1}{3}x^3$ + vel — &c.

Ccc 2

* *Intelligit Auctor Lectiones in calculum differentialem quæ præcesserunt, quasque supprimendas duxit, siquidem omnia, quæ in Lectionibus istis continentur, ab* Illustr. HOSPITALIO *relata fuerunt in Librum suum quem inscripsit*, Analyse des infiniment petits, *qui in omnium manibus versatur*.

N°. CXLIX.

JOHANNIS BERNOULLI

LECTIONES MATHEMATICÆ,

DE

METHODO INTEGRALIUM, ALIISQUE;

CONSCRIPTÆ

IN USUM

ILL. MARCHIONIS *HOSPITALII*;

Cum Auctor Parisiis ageret

Annis 1691 & 1692.

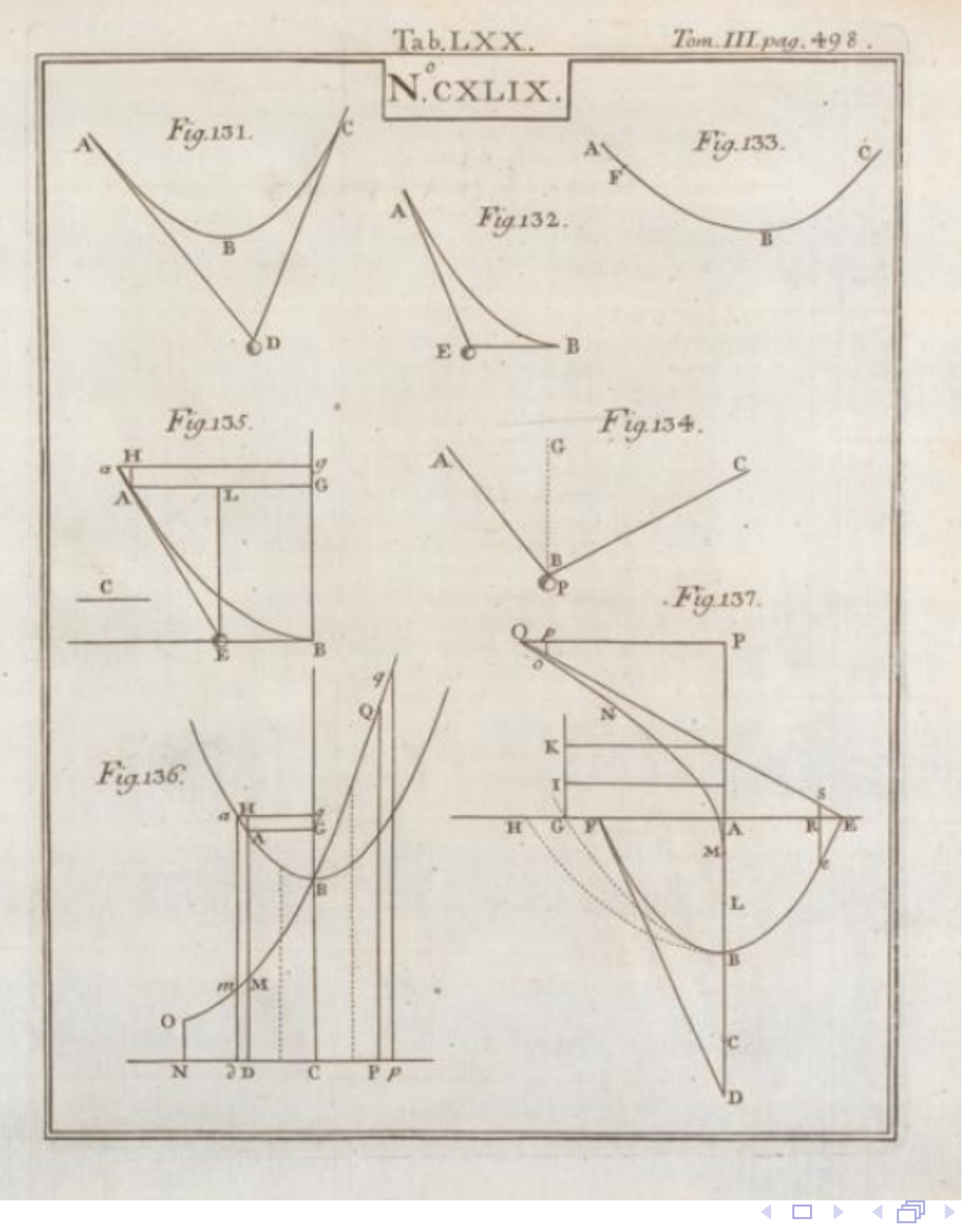
Johann Bernoulli (1667-1748): la determinazione della curva catenaria

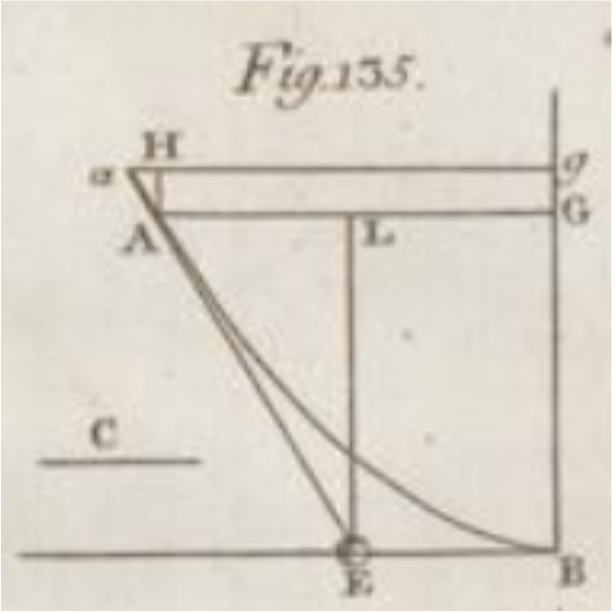
LECTIO TRIGESIMA SEXTA.

De Curvis Funiculariis vel Catenariis.

QUantum utilitatis Problema lineæ Catenariæ in Geometria obtineat, videre eſt ex tribus ſolutionibus *Actis Lipſienſibus* anni præteriti (1691) inſertis, & præcipue ex iis quæ Celeb: LEIBNITIUS ibi annotat. Primus qui de iſta curva a filo, vel potius catenula quæ non eſt extenſibilis, libere pendente formata cogitavit, fuit GALILÆUS; naturam autem ejus non penetravit, utpote qui Parabolam eſſe ſtatuit, quæ tamen minime eſt. *Joachimus* JUNGIUS, ut animadvertit Dnus. LEIBNITIUS, per calculum & multa experimenta inſtituta, comperiit non eſſe Parabolam; interim veram curvam non aſſignavit. Solutio itaque eximii hujus Problematis ad noſtrum uſque tempus reſervata fuit; quam, una cum calculo qui in *Actis* ſolutioni* non adjungitur, hic exhibemus. Curva interim catenaria duplex eſt, vel vulgaris, quæ formatur a filo vel catena æqualiter craſſa, ſeu in omnibus ſuis punctis æqualiter gravata; vel non vulgaris, quæ nempe formatur a filo inæqualiter craſſo, id eſt, quod in omnibus ſuis puncti

Johann Bernoulli (1667-1748): la determinazione della curva catenaria





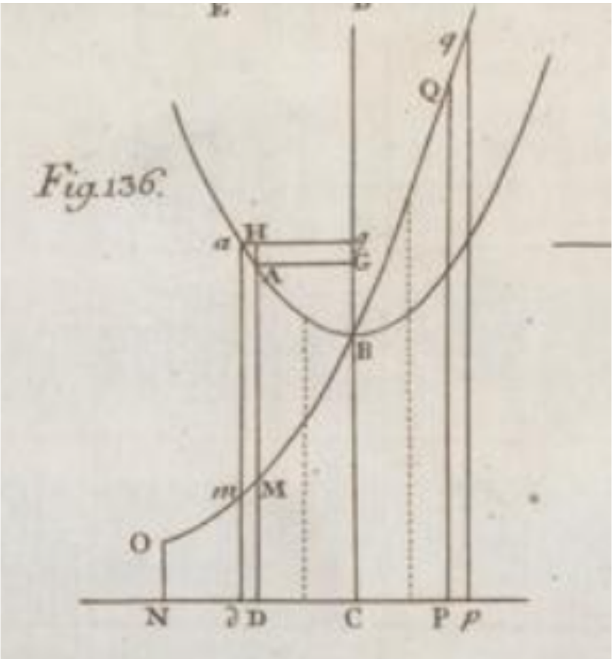
Peso in E : Tensione in B = $\sin(\angle AEB) : \sin(\angle AEL) = EL : AL = dx : dy$

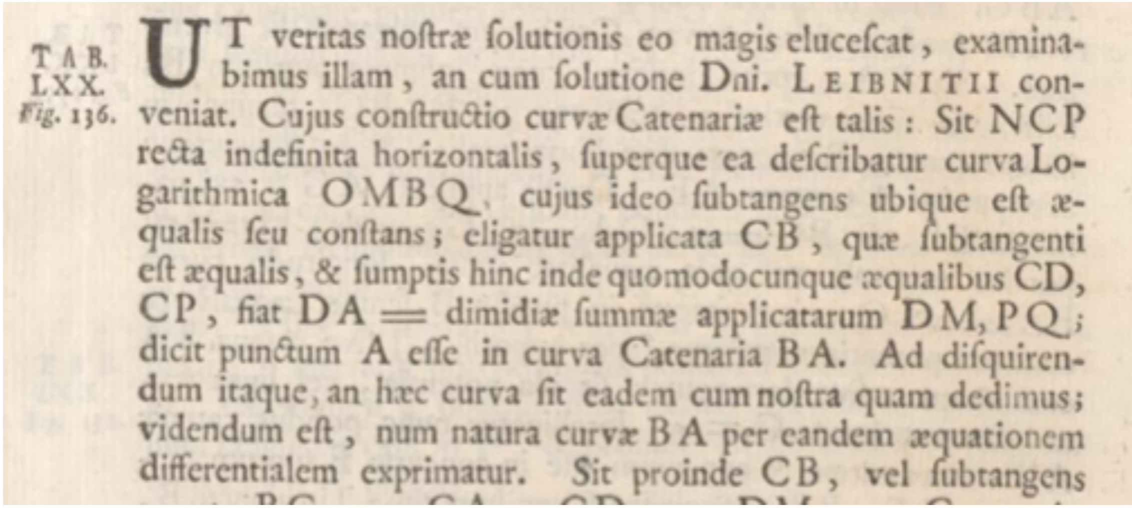
Detta a l'intensità della tensione in B e $BA = s$, si ha: $s : a = dx : dy$.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{s}$$

$$x = a \cosh y/a$$

Johann Bernoulli (1667-1748): la determinazione della curva catenaria





TAB. LXX. Fig. 136.

UT veritas nostræ solutionis eo magis elucescat, examinabimus illam, an cum solutione Dni. LEIBNITII conveniat. Cujus constructio curvæ Catenariæ est talis: Sit NCP recta indefinita horizontalis, superque ea describatur curva Logarithmica OMBQ, cujus ideo subtangens ubique est æqualis seu constans; eligatur applicata CB, quæ subtangenti est æqualis, & sumptis hinc inde quomodocunque æqualibus CD, CP, fiat DA = dimidiæ summæ applicatarum DM, PQ; dicit punctum A esse in curva Catenaria BA. Ad disquirendum itaque, an hæc curva sit eadem cum nostra quam dedimus; videndum est, num natura curvæ BA per candem æquationem differentialem exprimatur. Sit proinde CB, vel subtangens

Johann Bernoulli (1667-1748): la determinazione della curva catenaria

dicit punctum A eſſe in curva Catenaria BA. Ad diſquirendum itaque, an hæc curva ſit eadem cum noſtra quam dedimus; videndum eſt, num natura curvæ BA per eandem æquationem differentialem exprimatur. Sit proinde CB, vel ſubtangens $= a$, $BG = x$, $GA = CD = y$, $DM = z$, $Gg = dx$, $Dd = Ha = dy$; erit, per naturam Logarithmicæ, $zdy = adz$, proinde $dz = zdy : a$. Quoniam per conſtructionem $CD = CP$; erit $DM : CB = CB : PQ$, ideoque $PQ = aa : z$, & $\frac{1}{2} DM + \frac{1}{2} PQ$, hoc eſt, per conſtructionem, $DA = (aa+zz) : 2z = CB + BG = a + x$; ergo $zz = 2az + 2xz - aa$; quæ æquatio ſi reſolvatur dat $z = a + x + \sqrt{(2ax + xx)}$, proinde $dz = dx + (a+x)\,dx : \sqrt{(2ax+xx)}$. Subſtituto valore ipſius z in priore æquatione $dz = zdy : a$, proveniet $dx + (a+x)\,dx : \sqrt{(2ax+xx)} = (ady + xdy + dy\sqrt{(2ax+xx)}) : a$, vel $(adx\sqrt{(2ax+xx)} + aadx + axdx) : \sqrt{(2ax+xx)} = ady + xdy + dy\sqrt{(2ax+xx)}$, & diviſo utroque per $a + x + \sqrt{(2ax + xx)}$ habetur $adx : \sqrt{(2ax+xx)} = dy$, quæ æquatio, quia eadem

Breve inciso sul teorema di De l'Hôpital

TABLE.

TABLE.

Breve inciso sul teorema di De l'Hôpital

SECTION IX.

Solution de quelques Problêmes qui dépendent des Méthodes précédentes.

PROPOSITION I.

Problême.

163. SOIT *une ligne courbe* AMD (AP $=$ x, PM $=$ y, AB $=$ a) *telle que la valeur de l'appliquée* y *soit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorsque* x $=$ a, *c'est-à-dire lorsque le point* P *tombe sur le point donné* B. *On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée* BD. FIG. 130.

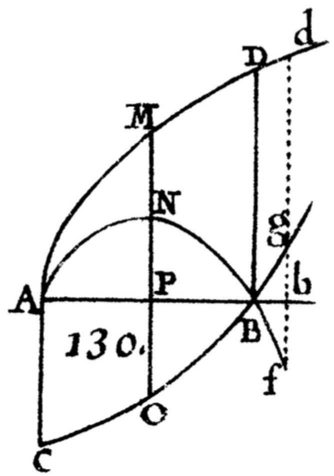
Soient entenduës deux lignes courbes *ANB, COB,* qui ayent pour axe commun la ligne *AB*, & qui soient telles que l'appliquée *PN* exprime le numérateur, & l'appliquée *PO* le dénominateur de la fraction générale qui convient à toutes les *PM*: de sorte que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Il est clair que ces deux courbes se rencontreront au point *B*; puisque par la supposition *PN* & *PO* deviennent chacune zero lorsque le point *P* tombe en *B*. Cela posé, si l'on imagine une appliquée *bd* infiniment proche de *BD*, & qui rencontre les lignes courbes *ANB, COB* aux points *f, g*; l'on aura $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle * ne diffère pas de *BD*. **Art. 2.* Il n'est donc question que de trouver le rapport de *bg* à *bf*. Or il est visible que la coupée *AP* devenant *AB*, les appliquées *PN, PO* deviennent nulles; & que *AP* devenant *Ab*, elles deviennent *bf, bg*. D'où il suit que ces appliquées, elles-mêmes *bf, bg*, sont la différence des appliquées en *B* & *b* par rapport aux courbes *ANB, COB*; & partant que si l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la divise par la différence du dénominateur, aprés

T

avoir fait $x = a = Ab$ ou *AB*, l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée *bd* ou *BD*. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

164. SOIT $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Il est clair que lorsque $x = a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'est-pourquoy l'on prendra la différence $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{axx}}$ du numérateur, & on la divisera par la différence $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ du dénominateur, aprés avoir fait $x = a$, c'est-à-dire qu'on divisera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{3}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de *BD*.



- Nasce a Basel in Svizzera nel 1707
- Studia con Johann Bernoulli
- Nel 1727 si trasferisce alla Accademia delle Scienze di San Pietroburgo
- Nel 1741 si reca a Berlino presso la locale Accademia.
- 1766, ritorno in Russia a San Pietroburgo
- 1783, muore a San Pietroburgo.

Eulero pubblica tre trattati fondamentali che segnano l'inizio di un nuovo sviluppo per l'analisi:

- *Introductio in analysin infinitorum*, 1748, 2 volumi;
- *Institutiones calculi differentialis*, 1755;
- *Institutiones calculi integralis*, 1768-1770, 3 volumi.

Al cuore della riformulazione di Eulero vi è la seguente definizione di funzione:

4. *Functio quantitatis variabilis, eſt expreſſio analytica quomodocunque compoſita ex illa quantitate variabili, & numeris ſeu quantitatibus conſtantibus.*

Omnis ergo expreſſio analytica, in qua præter quantitatem variabilem z omnes quantitates illam expreſſionem componentes ſunt conſtantes, erit Functio ipſius z: Sic $a+3z$; $az-4zz$; $az+b\sqrt{(aa-zz)}$; c^z; &c. ſunt Functiones ipſius z.

> *Siano E e F due insiemi, non necessariamente distinti. Una relazione fra un elemento variabile x di E e un elemento variabile y di F è detta relazione funzionale in y, se, per ogni $x \in E$, esiste un unico $y \in F$ che è nella data relazione con x.*
> *Diamo il nome di funzione all'operazione che associa in questo modo ad ogni elemento $x \in E$ l'elemento $y \in F$ che è nella data relazione con x. (Bourbaki, 1968)*

Una funzione altro non è che un opportuno sottoinsieme R del prodotto cartesiano $E \times F$, tale cioè che se $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R$ con $x_1 = x_2$, deve essere necessariamente $y_1 = y_2$.

La *vulgata* in breve

- La nozione di funzione emerge a partire dal XVII secolo, in concomitanza con la nascita e lo sviluppo del calcolo infinitesimale.

Si tratta, come spesso accade, di una semplificazione che non rende giustizia della complessità della storia che ha portato, attraverso un plurisecolare processo di sedimentazione, alla nozione espressa dalla precedente definizione di Bourbaki.

- La nozione di funzione emerge a partire dal XVII secolo, in concomitanza con la nascita e lo sviluppo del calcolo infinitesimale.
- Una prima definizione del concetto si ha con Euler (1748), il quale definisce una funzione come il dato di una espressione analitica.

Si tratta, come spesso accade, di una semplificazione che non rende giustizia della complessità della storia che ha portato, attraverso un plurisecolare processo di sedimentazione, alla nozione espressa dalla precedente definizione di Bourbaki.

La *vulgata* in breve

- La nozione di funzione emerge a partire dal XVII secolo, in concomitanza con la nascita e lo sviluppo del calcolo infinitesimale.
- Una prima definizione del concetto si ha con Euler (1748), il quale definisce una funzione come il dato di una espressione analitica.
- Per un secolo (circa) tale definizione riveste un ruolo dominante, almeno fino a quando Lobachevskii (1834) e Dirichlet (1837) propongono una definizione nella sostanza coincidente con quella di una legge di corrispondenza qualunque che associa a un valore assegnato della variabile indipendente un *unico* valore della variabile dipendente.

Si tratta, come spesso accade, di una semplificazione che non rende giustizia della complessità della storia che ha portato, attraverso un plurisecolare processo di sedimentazione, alla nozione espressa dalla precedente definizione di Bourbaki.

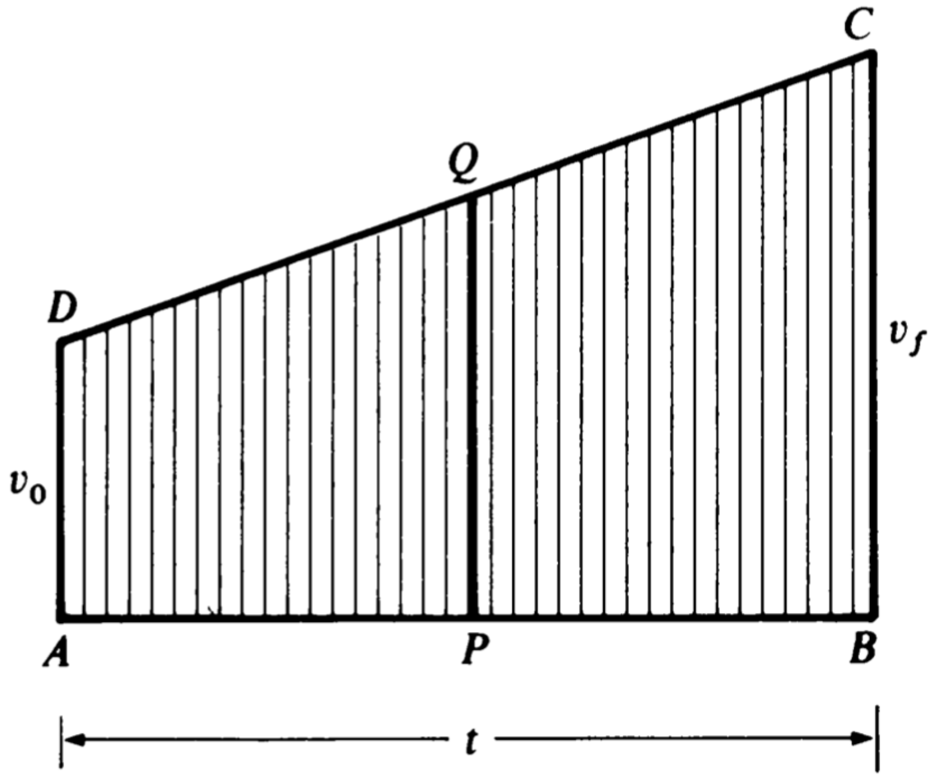
Una storia che comincia da lontano...

- Antichità: vago impiego di una nozione di relazione funzionale può essere rintracciato ad esempio in Apollonio nella caratterizzazione delle coniche attraverso il loro "sintomo" o nelle tavole ad uso astronomico che si trovano nell'*Almagesto* di Tolomeo, che contengono ad esempio i valori di certe funzioni razionali o semplici funzioni irrazionali dei seni di un arco.
- Medioevo: rappresentazione della dipendenza di alcune "qualità" rispetto al tempo e al luogo da parte di filosofi scolastici come il francese Nicole d'Oresme: la cosiddetta "latitudine delle forme".

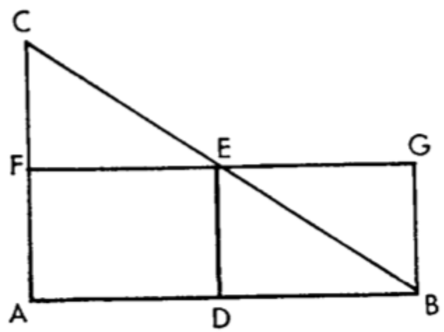
Nicola d'Oresme, 1323-1382

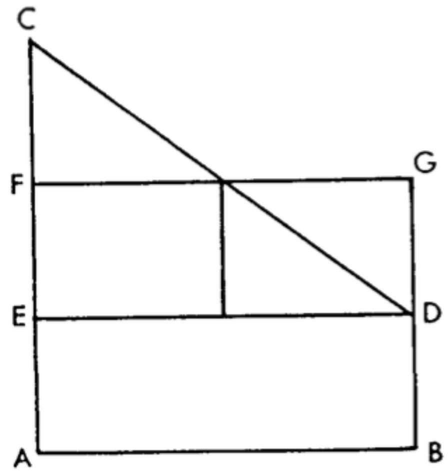
Nicola d'Oresme, *Tractatus de configuratione qualitatum et motuum*.

Rappresentazione della variazione della velocità. Velocità è una qualità, cioè un attributo che ammette una intensità. Qualità intensive sono distinte dalle corrispondenti quantità estensive: la distanza percorsa o il tempo. In figura, le linee verticali sono le latitudini, cioè i gradi della intensità, che sono tracciate perpendicolarmente rispetto alla linea delle "longitudini", i segmenti della quale rappresentano la corrispondente "estensione", ad esempio il tempo.



Omnis qualitas, si fuerit uniformiter difformis, ipsa est tanta quanta foret qualitas eiusdem subiecti vel equalis uniformis secundum gradum puncti medii eiusdem subiecti; et hoc intelligo si qualitas fuerit linearis.





Ciò consente ad esempio di ricavare lo spazio percorso in un moto uniformemente accelerato (*uniformiter difformis*) come segue:

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v_f)t$$

Un'innovazione cruciale

L'introduzione dell'algebra simbolica da parte di François Viète e il suo impiego nel contesto della geometria analitica di Fermat e Descartes furono tappe essenziali nella costruzione del concetto di funzione:

- Il linguaggio simbolico consente di rappresentare efficacemente il concetto di variabilità per grandezze indeterminate

Un'innovazione cruciale

L'introduzione dell'algebra simbolica da parte di François Viète e il suo impiego nel contesto della geometria analitica di Fermat e Descartes furono tappe essenziali nella costruzione del concetto di funzione:

- Il linguaggio simbolico consente di rappresentare efficacemente il concetto di variabilità per grandezze indeterminate
- Primi esempi più o meno espliciti di relazione funzionale per segmenti di misura variabile:
  Quoties in ultima aequalitate duae quantitates ignotae reperiuntur, sit locus et terminus alterius ex illis describet lineam rectam aut curvam, Fermat, *Ad locos planos*, ante 1637;
  Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers points tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe démandée, Descartes, *Géométrie*, 1637.

W. G. Leibniz (1646-1716)

La comparsa del termine *functio*... nel contesto matematico

La prima attestazione (in un contesto matematico) del termine *functio, -nis* pare essere in un manoscritto del 1673 di Leibniz che reca il titolo *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus* contenuto in *DE FUNCTIONIBUS PLAGULAE QUATTUOR*, Agosto 1673. Qui Leibniz affronta dapprima il cosiddetto problema diretto per curve "geometriche" e "non-geometriche" (come la cicloide) osservando che:

> *Esto figura curvilinea ABCDA in qua relatio applicatae ED ad abscissam AE aequatione quadam nobis cognita explicatur: id enim utique necesse est, si modo figurae natura nobis nota est. (***Si consideri una figura curvilinea** *ABCDA* **nella quale la relazione dell'applicata** *ED* **con l'ascissa** *AE* **è data da una certa equazione a noi nota: ciò in ogni caso avviene necessariamente soltanto se la natura della figura ci è nota.***)*

Quindi, Leibniz affronta il problema inverso che consiste nel determinare le ordinate a partire dalle proprietà delle tangenti o di qualche altro genere di linea che svolge una certa funzione rispetto alla curva:

> *Unde notari potest, quoties ex aliis linearum in figura data functiones facientium generibus assumtis, applicatae quaeruntur, unam semper applicatam ponendam velut assumtam, et sequentem velut quaesitam.* **[...] ogni qualvolta a partire da altri tipi di linee che nella figura data svolgono certe funzioni [...].**

Leibniz non usa ancora la parola funzione per indicare una relazione fra variabili. Come prova la prima delle citazioni precedenti, egli dispone di una qualche nozione di funzione (nel senso usuale del termine) e lo indica con il vocabolo *relatio*.
Nella seconda citazione, il termine *functio* non ha assunto il significato matematico odierno, ma quello che le associamo nel linguaggio della vita reale; significa quindi qualcosa come il "ruolo" che un membro di un organo o una parte di una macchina deve svolgere, il suo compito, la sua posizione o il suo modo di operare. "In figura functionem facere" significa, ad esempio: toccare la curva, stare perpendicolarmente ad essa, formarne la subtangente o subnormale, ecc..

N°. CXLIX.

JOHANNIS BERNOULLI

LECTIONES MATHEMATICÆ,

DE

METHODO INTEGRALIUM, ALIISQUE;

CONSCRIPTÆ

IN USUM

ILL. MARCHIONIS *HOSPITALII*;

Cum Auctor Parisiis ageret

Annis 1691 & 1692.

Il carteggio con Johann Bernoulli

In una lettera a Leibniz del 2 Settembre 1694, Bernoulli comunica a Leibniz il seguente sviluppo in serie [la notazione è leggermente modificata]:

$$\int ndz = nz - \frac{1}{1 \times 2} z \cdot z \frac{dn}{dz} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} z^3 \frac{ddn}{dz^2} - \dots$$

e osserva: *per n intelligo quantitatem quomodocunque formata ex indeterminatis et costantibus* (**Intendo con** n **una quantità formata in un modo qualunque da indeterminate e costanti.**) .

Il primo impiego in un testo a stampa del termine funzione in un senso vicino a quello odierno ritroviamo nel seguente lavoro di Bernoulli: *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des probèmes sur les isopérimètres*, 1718.

> *Définition. On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.* **Si chiama funzione di una grandezza variabile una quantità composta in un modo quale che sia da questa grandezza variabile e da costanti**.

Qui Bernoulli introduce il simbolo ϕ, per denotare la "caractéristique" (l'espressione è dovuta a Leibniz) di una funzione, scrivendo ϕx.

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.

La definizione di Euler, 1748

Nel primo capitolo della sua *Introductio in analysin infinitorum*, troviamo le seguenti definizioni:

> *Quantitas variabilis est quantitas indeterminata seu universalis quae omnes omnino valores determinatos in se complectitur.* **Una quantità variabile è una quantità indeterminata o universale che abbraccia in sè tutti i valori**.
> *Quantitas ergo variabilis in se complectitur omnes prorsus numeros tam affirmativos quam negativos, tam integros quam fractos, tam irrationales et transcendentes. Quin etiam cyphra et numeri imaginarii a significatu quantitatis varabiabilis non excluditur. [...]*
> *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.* **Una funzione di una quantità variabile è una espressione analitica composta in modo qualsivoglia da quella quantità variabile e da numeri, cioè da costanti**.

La definizione di Euler, 1748

Che cosa intende Euler con le parole "expressio analytica"?
In primo luogo serie di potenze intere positive del tipo:

$$A + Bz + Cz^2 + \dots .$$

A questo proposito, sospettando che qualcuno potesse opporre perplessità sulla possibilità di rappresentare in tal modo una qualunque funzione, Euler precisa:

> *si quis dubitet, hoc dubium per ipsam evolutionem cuisque functionis tolletur.*

In realtà, questa interpretazione appare a Euler sin troppo restrittiva. Ammette così che gli sviluppi contengano esponenti $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ qualunque:

$$Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + \dots .$$

CAPUT IV

DE EXPLICATIONE FUNCTIONUM PER SERIES INFINITAS

59. Cum functiones fractae atque irrationales ipsius z non in forma integra $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ etc. contineantur, ita ut terminorum numerus sit finitus, quaeri solent huiusmodi expressiones in infinitum excurrentes, quae valorem cuiusvis functionis sive fractae sive irrationalis exhibeant; quin etiam natura functionum transcendentium melius intelligi censetur, si per eiusmodi formam etsi infinitam exprimantur. Cum enim natura functionis integrae optime perspiciatur, si secundum diversas potestates ipsius z explicetur atque adeo ad formam $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ etc. reducatur, ita eadem forma aptissima videtur ad reliquarum functionum omnium indolem menti repraesentandam, etiamsi terminorum numerus sit revera infinitus. Perspicuum autem est nullam functionem non integram ipsius z per numerum huiusmodi terminorum $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ etc. finitum exponi posse; eo ipso enim functio foret integra. Num vero per huiusmodi terminorum seriem infinitam exhiberi possit, si quis dubitet, hoc dubium per ipsam evolutionem cuiusque functionis tolletur. Quo autem haec explicatio latius pateat, praeter potestates ipsius z exponentes integros affirmativos habentes admitti debent potestates quaecunque. Sic dubium erit nullum, quin omnis functio ipsius z in huiusmodi expressionem infinitam transmutari possit

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \text{etc.}$$

denotantibus exponentibus α, β, γ, δ etc. numeros quoscunque.

Poiché le funzioni di z sia razionali che irrazionali non sono della forma $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$, in maniera tale che il numero di termini è finito, si suole cercare l'espansione all'infinito di espressioni di questo tipo che restituiscono il valore di una qualsivoglia funzione o fratta o irrazionale. Si ritiene in verità che la natura delle funzioni trascendenti possa essere meglio compresa una volta che esse siano espresse in forma siffatta, anche se infinita. Poiché la natura di una funzione intera [cioè di un polinomio] è meglio compresa quando essa è sviluppata secondo le diverse potenze di z ed è ridotta nella forma $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$, così questa stessa forma pare la più adatta a rappresentare nella mente la natura di tutte le altre funzioni, anche se il numero dei termini è in realtà infinito. È chiaro che nessuna funzione di z che non sia un polinomio può essere sviluppata in un numero finito di termini $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$. Infatti in questo caso si tratterebbe di un polinomio. Se c'è qualcuno che dubita che una funzione possa essere sviluppata attraverso una serie infinita siffatta di termini, questo dubbio potrà essere fugato attraverso l'espansione esplicita di una qualsivoglia funzione. Così non ci sarà più alcun dubbio circa il fatto che ogni funzione di z possa essere trasformata in una espressione del tipo:

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \ldots$$

Eulero: *Introductio in analysin infinitorum*, 1748

CAPUT VI

DE QUANTITATIBUS EXPONENTIALIBUS AC LOGARITHMIS

96. Quanquam notio functionum transcendentium in Calculo integrali demum perpendetur, tamen, antequam eo perveniamus, quasdam species magis obvias atque ad plures investigationes aditum aperientes evolvere conveniet. Primum ergo considerandae sunt quantitates exponentiales seu potestates, quarum exponens ipse est quantitas variabilis. Perspicuum enim est huiusmodi quantitates ad functiones algebraicas referri non posse, cum in his exponentes non nisi constantes locum habeant. Multiplices autem sunt quantitates exponentiales, prout vel solus exponens est quantitas variabilis vel praeterea etiam ipsa quantitas elevata. Prioris generis est a^z, huius vero y^z; quin etiam ipse exponens potest esse quantitas exponentialis, uti in his formis a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{y^z}. Huiusmodi autem quantitatum non plura constituemus genera, cum earum natura satis clare intelligi queat, si primam tantum speciem a^z evolverimus.

97. Sit igitur proposita huiusmodi quantitas exponentialis a^z, quae est potestas quantitatis constantis a exponentem habens variabilem z. Cum igitur iste exponens z omnes numeros determinatos in se complectatur, primum patet, si loco z omnes numeri integri affirmativi successive substituantur, loco a^z hos prodituros esse valores determinatos

$$a^1,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4,\quad a^5,\quad a^6 \text{ etc.}$$

Sin autem pro z ponantur successive numeri negativi -1, -2, -3, -4 etc., Sebbene la nozione di funzione trascendente possa essere valutata soltanto nell'ambito del calcolo integrale, tuttavia prima di arrivare a ciò, converrà trattare di alcuni tipi più elementari che aprono la strada a un gran numero di indagini. In primo luogo occorre considerare le quantità esponenziali e cioè le potenze nelle quali l'esponente è esso stesso una quantità variabile. È chiaro che le quantità di questo tipo non possono essere ricondotte a funzioni algebriche poiché in queste compaiono solo esponenti costanti. Le quantità esponenziali sono di vario tipo a seconda che solo l'esponente è variabile oppure anche la quantità elevata. a^z è del primo tipo, y^z del secondo. In realtà anche l'esponente stesso può essere una quantità esponenziale come in $a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{y^z}$. [....]

Multo maiores autem saltus occurrent, si quantitas constans a habeat valorem negativum, puta -2. Tum enim ponendis loco z numeris integris valores ipsius a^z alternatim erunt affirmativi et negativi, ut ex hac serie intelligitur

$$\begin{array}{cccccccccc} a^{-4}, & a^{-3}, & a^{-2}, & a^{-1}, & a^0, & a^1, & a^2, & a^3, & a^4 & \text{etc.} \\ +\frac{1}{16}, & -\frac{1}{8}, & +\frac{1}{4}, & -\frac{1}{2}, & 1, & -2, & +4, & -8, & +16 & \text{etc.} \end{array}$$

Praeterea vero, si exponenti z valores tribuantur fracti, potestas $a^z = (-2)^z$ mox reales mox imaginarios induet valores; erit enim $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ imaginarium, at erit $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$ reale; utrum autem, si exponenti z tribuantur valores irrationales, potestas a^z exhibeat quantitates reales an imaginarias, ne quidem definiri licet.

100. His igitur incommodis numerorum negativorum loco a substituendorum commemoratis statuamus a esse numerum affirmativum et unitate quidem maiorem, quia huc quoque illi casus, quibus a est numerus affirmativus unitate minor, facile reducuntur. Si ergo ponatur $a^z = y$, loco z substituendo omnes numeros reales, qui intra limites $+\infty$ et $-\infty$ continentur, y adipiscetur omnes valores affirmativos intra limites $+\infty$ et 0 contentos. Si enim sit $z = \infty$, erit $y = \infty$; si $z = 0$, erit $y = 1$, et si $z = -\infty$, fiet $y = 0$. Vicissim ergo quicunque valor affirmativus pro y accipiatur, dabitur quoque valor realis respondens pro z, ita ut sit $a^z = y$; sin autem ipsi y tribueretur valor negativus, exponens z valorem realem habere non poterit.

CAPUT VII

DE QUANTITATUM EXPONENTIALIUM AC LOGARITHMORUM PER SERIES EXPLICATIONE

114. Quia est $a^0 = 1$ atque crescente exponente ipsius a simul valor potestatis augetur, si quidem a est numerus unitate maior, sequitur, si exponens infinite parum cyphram excedat, potestatem ipsam quoque infinite parum unitatem esse superaturam. Sit ω numerus infinite parvus seu fractio tam exigua, ut tantum non nihilo sit aequalis; erit

$$a^\omega = 1 + \psi$$

existente ψ quoque numero infinite parvo. Ex praecedente enim capite constat, nisi ψ esset numerus infinite parvus, neque ω talem esse posse. Erit ergo vel $\psi = \omega$ vel $\psi > \omega$ vel $\psi < \omega$, quae ratio utique a quantitate litterae a pendebit; quae cum adhuc sit incognita, ponatur $\psi = k\omega$, ita ut sit

$$a^\omega = 1 + k\omega,$$

et sumpta a pro basi logarithmica erit

$$\omega = l(1 + k\omega).$$

115. Cum sit $a^{\omega} = 1 + k\omega$, erit

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i,$$

quicunque numerus loco i substituatur. Erit ergo

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \text{etc.}$$

Quodsi ergo statuatur $i = \frac{z}{\omega}$ et z denotet numerum quemcunque finitum, ob ω numerum infinite parvum fiet i numerus infinite magnus hincque $\omega = \frac{z}{i}$, ita ut sit ω fractio denominatorem habens infinitum adeoque infinite parva, qualis est assumpta. Substituatur ergo $\frac{z}{i}$ loco ω eritque

$$a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3$$
$$+ \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}k^4z^4 + \text{etc.},$$

quae aequatio erit vera, si pro i numerus infinite magnus substituatur. Tum vero est k numerus finitus ab a pendens, uti modo vidimus.

116. Cum autem i sit numerus infinite magnus, erit

$$\frac{i-1}{i}=1;$$

patet enim, quo maior numerus loco i substituatur, eo propius valorem fractionis $\frac{i-1}{i}$ ad unitatem esse accessurum; hinc, si i sit numerus omni assignabili maior, fractio quoque $\frac{i-1}{i}$ ipsam unitatem adaequabit. Ob similem autem rationem erit

$$\frac{i-2}{i}=1, \quad \frac{i-3}{i}=1$$

et ita porro; hinc sequitur fore

$$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}, \quad \frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3}, \quad \frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4}$$

et ita porro. His igitur valoribus substitutis erit

$$a^z=1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{etc. in infinitum.}$$

Haec autem aequatio simul relationem inter numeros a et k ostendit; posito enim $z=1$ erit

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{etc.}$$

atque, ut a sit $=10$, necesse est, ut sit circiter $k=2{,}30258$, uti ante invenimus.

Quodsi iam ex hac basi logarithmi construantur, ii vocari solent logarithmi *naturales* seu *hyperbolici*, quoniam quadratura hyperbolae per istiusmodi logarithmos exprimi potest. Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,71828 18284 59 etc. constanter litteram

$$e,$$

quae ergo denotabit basin logarithmorum naturalium seu hyperbolicorum [1]), cui respondet valor litterae $k = 1$; sive haec littera e quoque exprimet summam huius seriei

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc. in infinitum.}$$

123. Logarithmi ergo hyperbolici hanc habebunt proprietatem, ut numeri $1 + \omega$ logarithmus sit $= \omega$ denotante ω quantitatem infinite parvam, atque cum ex hac proprietate valor $k = 1$ innotescat, omnium numerorum logarithmi hyperbolici exhiberi poterunt. Erit ergo posita e pro numero supra invento perpetuo

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

Eulero: il problema di Basilea

Sul finire del 1746 J. Le Rond D'Alembert conclude un memoria (pubblicata nel 1747, in *Hist. Acad. Sci. Berlin*, 3, 214-219) dal titolo "Ricerche sulla curva che descrive una corda tesa posta in vibrazione".
"In questa memoria mi propongo di dimostrare che esistono infinite curve distinte dalla *Compagne de la Cycloide allongée* [il grafico della funzione seno] che soddisfano al problema di cui si tratta."
Il problema consiste nel descrivere il moto di vibrazione di una corda tesa, e cioè nel trovare una "funzione incognita" $y(t,x)$ che descrive il profilo della corda come funzione di x al variare del tempo.
Nella prima parte della memoria D'Alembert ricava una condizione differenziale che è traducibile nella seguente forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Occorre notare però che l'originaria formulazione non contempla l'uso di derivate parziali ma soltanto l'impiego di differenziali, secondo la consuetudine del calcolo leibniziano. In accordo con tale concezione, la curva veniva concepita come una poligonale costituita da infiniti lati di lunghezza infinitesima $(ds = (dx, dy))$.

Mediante un cambiamento di unità di misura, tale equazione è riscritta così:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Poiché in generale vale:

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial x} \pm \frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}(dt \pm dx) \pm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dt.$$

Tenendo conto di (**??**), si ha che $\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x}$ sono funzioni rispettivamente di $t + x$ e di $t - x$. Dal che, D'Alembert ricava, integrando:

$$y(x, t) = \Psi(t + x) + \Gamma(t - x). \tag{4}$$

"È agevole vedere che questa equazione include una infinità di curve. Per dimostrarlo consideriamo soltanto un caso particolare, cioè il caso in cui $y = 0$, per $t = 0$."

Imponendo dunque le condizioni

$$y(x,0) = 0, \quad y(0,t) = y(L,t) = 0 \quad (L \text{ è la lunghezza della corda}),$$

si ottiene: $\Gamma(-x) = -\Psi(x), \Gamma(t) = -\Psi(t)$, che implica la parità delle funzioni Γ e Ψ. Inoltre, si ha che $\Psi(t+L) = \Psi(t-L)$. In altre parole, "occorre trovare una quantità $\Psi(t+x)$ tale che $\Psi(x) - \Psi(-x) = 0$ e $\Psi(t+L) = \Psi(t-L)$". In tal caso la soluzione sarà:

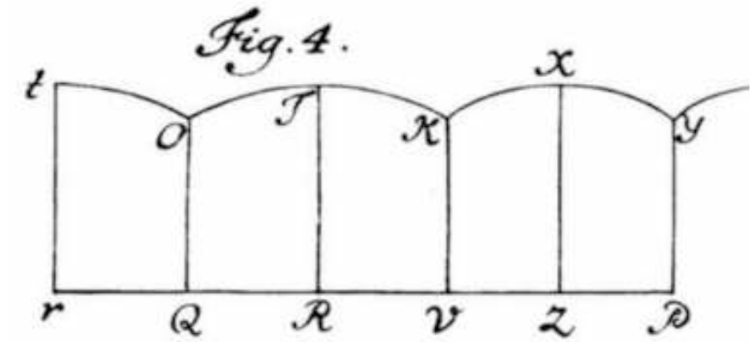
$$y = \Psi(t+x) - \Psi(t-x)$$

Occorre dunque costruire una funzione siffatta. D'Alembert propone il seguente ragionamento di natura geometrica che sarà di lì a poco ripreso da Euler.

IX. Pour y parvenir, imaginons la courbe $t\,o\,T$, dont les coordonnées ſoyent $TR = u$, $QR = z$, & qui ſoyent telles, que $u = \psi z$; cela poſé puisque $\psi\, s - \psi - s$ doit etre egale à zero, il eſt evident qu'en prenant $Qr = QR$, il faut que $rt = RT$; & qu'ainſi la courbe $t\,o\,T$ aura, de part & d'autre du point o, des portions ſemblables & egales, $t\,o$, $o\,T$. De plus, comme $\psi\,(t+l)$ doit etre $=$ à $\psi\,(t-l)$ & que la difference de $t+l$ & de $t-l$ eſt $2\,l$, il eſt evident que la courbe $t\,o\,T$ doit etre telle, qu'etant ſuppoſée entierement decrite, deux ordonnées quelconques diſtantes l'une de l'autre de la quantité $2\,l$, ſoyent egales entr'elles. Donc ſi on ſuppoſe $QR = l$, on verra que la partie TK doit etre egale & ſemblable à tO; que la partie KX doit etre auſſy egale & ſemblable à oT &c.; & comme les parties $t\,O$, $o\,T$, ſont deja ſemblables & egales, il s'enſuit que la courbe cherchée s'etend à l'infini des deux côtés du point o, & qu'elle eſt compoſée de parties toutes egales & ſemblables à la partie $o\,TK$, dont l'abſciſſe $QV = 2\,l$, & qui eſt diviſée

Memoires de l'Academie Tom. III. Ee diviſée

Fig. 4.



218

diviſée par ſon point de milieu T en deux parties ſemblables & égales.

"È facile vedere" che la velocità è data da:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \Psi'(t + x) - \Psi'(t - x).$$

La velocità inziale è allora $V(x) = 2\Psi'(x)$. Cioè, "l'espressione per la velocità iniziale [...] deve essere tale che quando ridotta a una serie essa includa solo potenze dispari di x. Altrimenti [...] il problema sarebbe irresolubile, non si potrebbe assegnare una funzione tale che rappresenti in generale il valore dell'ordinata della curva per ogni ascissa x e ad ogni istante t."

XX. Jusqu'à preſent les caracteres f & φ, dans l'equation

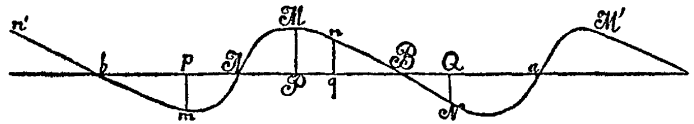
$$y = f : (x + t\sqrt{b}) + \Phi : (x - t\sqrt{b})$$

ſignifient des fonctions quelconques, qui different en raiſon de la compoſition, & leur relation ſe determine davantage par les autres conditions. Car comme en poſant $x = o$, on doit toujours avoir $y = o$, il doit etre $f:(+t\sqrt{b}) + \varphi\ (-t\sqrt{b}) = o$, & par conſequent $\varphi\ (-t\sqrt{b}) = -f:\ (t\sqrt{b})$. Or alors, parce qu'en poſant $x = a$, la valeur de y doit pareillement evanoüir, on aura auſſi $f:\ (a + t\sqrt{b}) + \varphi : (a - t\sqrt{b}) = o$; & ainſi la nature des fonctions f & φ doit etre définie de maniere qu'elle ſatisfaſſe à ces conditions.

$$\Phi : -t\sqrt{b} = -f :\ t\sqrt{b}$$
$$\Phi : (a - t\sqrt{b}) = -f : (a + t\sqrt{b})$$

XXI. Comme $f : z$ peut être repreſenté en général par l'appliquée d'une certaine courbe, dont l'abſciſſe eſt z, ſoit A M B la courbe dont les appliquées P M fourniſſent les fonctions des abſciſſes A P qui ſont déſignées par le caractere f: en ſorte que P M ſoit $= f:\ t \sqrt{b}$; auquel $\varphi : -t\sqrt{b}$ devant être negativement égal, qu'on prenne A p = A P, de ſorte que A p $= t\sqrt{b}$; & en poſant la courbe Amb au deſſous de l'axe de la courbe ſemblable A M B, on aura pm $= -f:\ t\sqrt{b} = \Phi : -t\sqrt{b}$. Donc la courbe Amb ſemblable à la courbe AMB expoſera la nature de l'autre fonction Φ. Alors la courbe AMB exiſtant d'une maniere ſemblable au delà de B, ſoit AB $= a$ continué au deſſous de l'axe, afin que la portion BN a ſoit ſemblable & égale à la courbe BnA, & en prenant BQ = Bq, on aura AQ $= a + t\sqrt{b}$, QN $= f:\ (a + t\sqrt{b})$, & pareillement à cauſe de Aq $= a - t\sqrt{b}$, il ſera qn $= f:\ (a - t\sqrt{b})$ d'où il paroit qu'une courbe de cette forme AMB, qui eſt continuée de part & d'autre à l'infini par des parties ſemblables & égales à elle même Am b, BNa, & qui ſoient ſituées alternativement en haut & en bas, eſt propre à repréſenter la nature de l'une & l'autre fonction f & φ. Fig. 1.

XXII. Ayant

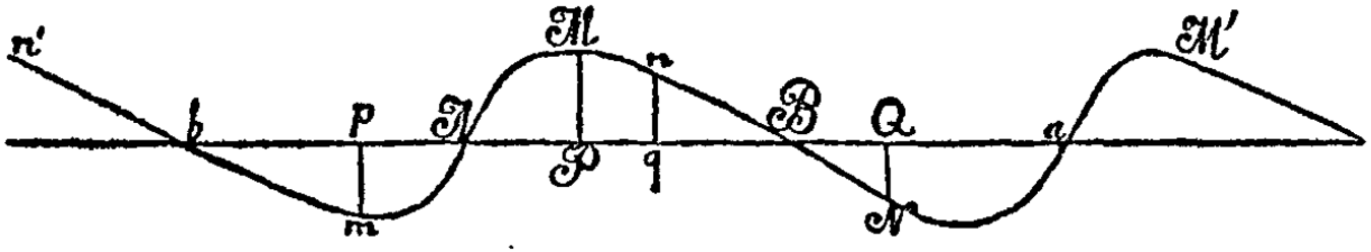


Eulero: *Sur la vibration des cordes (De vibratione cordarum)*, 1748-1750

Eulero afferma che la soluzione da lui proposta alla equazione delle onde coincide essenzialmente con quella di D'Alembert; tuttavia, egli aggiunge, intende fornire "qualche osservazione molto interessante sull'applicazione delle formule generali". Il profilo iniziale $Y(x) = y(x, 0)$ è assunto arbitrario, mentre implicitamente, Eulero assume che $v(x) := \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_0 = 0$. Dunque:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t).$$

Mediante una costruzione geometrica elementare Eulero mostra come a partire dal profilo iniziale della curva $y = f(x), 0 \leq x \leq L$ sia possibile dedurre la soluzione $y(x,t)$.Infatti, come Eulero scrive:
La funzione $y = f(x), 0 \leq x \leq L$ ha un grado di arbitrarietà molto maggiore rispetto a quello concesso da D'Alembert.
Prima autem vibratio ab arbitrio pendet, dum chordae, antequam dimittitur, figura quaecunque conciliari potest, atque hinc eiusdem chordae motus vibratorius in infinitum variari poterit, prout ei initio motus alia atque alia figura inducitur.



"[...] *se c'è una curva data, o un profilo, che la corda abbia ricevuto all'inizio del moto, si potrà ricavare la determinazione del profilo della corda in un qualunque tempo [...]. Infatti, descriviamo al di sopra dell'asse $AB = a$, che è la lunghezza della corda, il profilo iniziale AMB e riportiamolo da una parte all'altra in maniera invertita, così che $Amb = AMB$ e $BNa = BnA$ e immaginiamo la ripetizione continua di questa curva da un parte e dall'altra all'infinito secondo la medesima legge. Allora, se questa curva è impiegata per esprimere le funzioni trovate, dopo un tempo t, l'applicata [l'ordinata] che corrisponde all'ascissa x sarà data da $y = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t)$, da cui si potrà ottenere facilmente la costruzione della curva* [...]."

In effetti, mi pare che non si possa esprimere analiticamente y in maniera più generale se non supponendo che essa sia una funzione di t e di s [cioè di x]. Ma secondo tale ipotesi si può trovare la soluzione del problema solo nel caso in cui le diverse forme assunte dalla corda vibrante possono essere scritte in una sola equazione.

D'Alembert fa propria la nozione di continuità introdotta da Euler nel secondo volume della sua *Introductio* (1748) e stabilisce che le soluzioni accettabili sono soltanto quelle per le quali la funzione f è continua.

Daniel Bernoulli (1700-1782)

Secondo Bernoulli (1753) la stringa può formare le sue vibrazioni in una infinità di modi, con una molteplicità che tende all'infinito; ciò implica che tutti i corpi sonori contengono potenzialmente una infinità di suoni. A partire da questa richiesta fisica, la soluzione dell'equazione delle onde che Bernoulli propone è:

$$y(x,t) = \alpha \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi ct}{L} + \beta \sin \frac{2\pi x}{L} \cos \frac{2\pi ct}{L} + \dots$$

che ponendo $t = 0$ diviene:

$$y(x,0) = \alpha \sin \frac{\pi x}{L} + \beta \sin \frac{2\pi x}{L} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{L} \dots$$

Risposta di Eulero a Daniel Bernoulli

196

REMARQUES
SUR LES MÉMOIRES PRÉCEDENS DE *M. BERNOULLI*,
PAR M. EULER.

I.

Il n'y a aucun doute, que M. *Bernoulli* n'ait infiniment mieux développé la partie physique, qui renferme la formation du son dans le mouvement des cordes, qu'aucun autre n'a fait avant lui. On s'étoit presque uniquement arrêté à la détermination méchanique du mouvement, dont une corde tenduë peut être ébranlée, sans rechercher assez soigneusement la nature des sons, qui en sont produits. Malgré l'infinité de manieres differentes dont on a trouvé qu'une corde peut être mise en vibrations, on ne voyoit pas comme il seroit possible, qu'une même corde puisse rendre à la fois plusieurs sons differens; & c'est à M. *Bernoulli*, que nous sommes redevables de cette heureuse explication, qui est sans doute de la derniere importance dans la Physique. Il est aussi évident, que cette belle idée s'étend à toutes les autres especes des corps sonores, & que le même corps peut rendre à la fois tous les sons differens, dont il est susceptible séparément; & c'est le sujet que M. *Bernoulli* a traité avec le même succès dans son second Mémoire.

IX. Mais peut-être repliquera-t-on, que l'équation $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \&c.$ à cauſe de l'infinité de coëfficiens indéterminés, eſt ſi générale, qu'elle renferme toutes les courbes poſſibles: & il faut avouër, que ſi cela étoit vray, la méthode de M. *Bernoulli* fourniroit une ſolution complette. Mais, outre que ce grand Géometre n'a pas fait cette objection, toutes les courbes compriſes dans cette équation, quoiqu'on augmente le nombre des termes à l'infini, ont de certains caractères, qui les diſtinguent de toutes autres courbes. Car ſi l'on prend l'abſciſſe x négative, l'appliquée devient auſſi négative, & égale à celle qui repond à l'abſciſſe poſitive x; de même l'appliquée qui répond à l'abſciſſe $a + x$, eſt négative, & égale à celle qui convient

vient

vient à l'abfciffe x. Donc fi la courbe, qu'on aura donnée à la corde au commencement, n'a point ces propriétés, il eft certain qu'elle n'eft pas renfermée dans ladite équation. Or aucune courbe algébrique ne fauroit avoir ces propriétés, qu'il faut donc toutes exclure de cette équation; & il n'y a aucun doute, qu'il n'en faille auffi exclure une infinité de courbes tranfcendentes.

X. Mais, puisque la premiere courbe qu'on donne à la corde, eft abfolument arbitraire, il peut arriver, & il arrivera même le plus fouvent, que cette premiere courbure n'eft expreffible par aucune équation, foit algébrique, foit tranfcendente, & qu'elle n'eft renfermée dans aucune loi de continuité. Une telle courbe ne fera donc pas à plus forte raifon comprife dans l'équation alleguée. Suppofons donc que la corde ait eu au commencement une telle figure quelconque, fuppofition d'autant moins impoffible, que c'eft plutôt la feule, qui puiffe avoir lieu dans la pratique; & je demande quel fera fon mouvement, après qu'elle aura été relâchée? Il eft bien certain que ce mouvement étant réel doit être déterminable, & il eft auffi certain, qu'il ne fauroit être renfermé du moins pour les premiers inftans, dans celui que M. *Bernoulli* a tiré des trochoïdes Tayloriennes: & partant cette folution, toute belle qu'elle eft d'ailleurs, ne fauroit avoir lieu que dans les cas, où par quelque hazard la corde a reçu au commencement une des figures comprifes dans l'équation mentionnée; tous les autres cas feront exclus de cette folution.

La definizione di continuità di una curva

8. Quanquam complures lineæ curvæ per motum puncti continuum mechanice deſcribi poſſunt, quo pacto tota linea curva ſimul oculis offertur, tamen hanc linearum curvarum ex Functionibus originem hic potiſſimum contemplabimur, tanquam magis analyticam latiuſque patentem, atque ad calculum magis accommodatam. Quælibet ergo Functio ipſius x ſuppeditabit lineam quandam, ſive rectam ſive curvam, unde viciſſim lineas curvas ad Functiones revocare licebit. Cujuſque ergo lineæ curvæ natura exprimetur per ejuſmodi Functionem ipſius x, quæ, dum intervalla AP ad quæ perpendicula MP ex ſingulis curvæ punctis M in rectam RS demittuntur, per variabilem x indicantur, exhibeat ſemper veram iſtius Applicatæ MP longitudinem.

9. Ex hac linearum curvarum idea ſtatim ſequitur earum diviſio in *continuas*, & *diſcontinuas* ſeu *mixtas*. Linea ſcilicet curva *continua* ita eſt comparata, ut ejus natura per unam ipſius x Functionem definitam exprimatur. Quod ſi autem linea curva ita ſit comparata, ut variæ ejus portiones BM, MD, DM &c., per varias ipſius x Functiones exprimantur; ita ut, poſtquam ex una Functione portio BM fuerit definita, tum ex alia Functione portio MD deſcribatur; hujuſmodi lineas curvas *diſcontinuas* ſeu *mixtas* & *irregulares* appellamus: propterea quod non ſecundum unam legem conſtantem formantur, atque ex portionibus variarum curvarum continuarum componuntur.

10. De curvis autem continuis in Geometria potiſſimum eſt ſermo, atque infra oſtendetur, quæ curvæ motu uniformi ſecundum regulam quandam conſtantem mechanice deſcribuntur, eaſdem quoque per unicam Functionem exprimi, atque ideo eſſe

8. Although many different curves can be described mechanically as a continuously moving point, and when this is done the whole curve can be seen by the eye, still we will consider these curves as having their origin in functions, since then they will be more apt for analytic treatment and more adapted to calculus. Any function of x gives a curve or

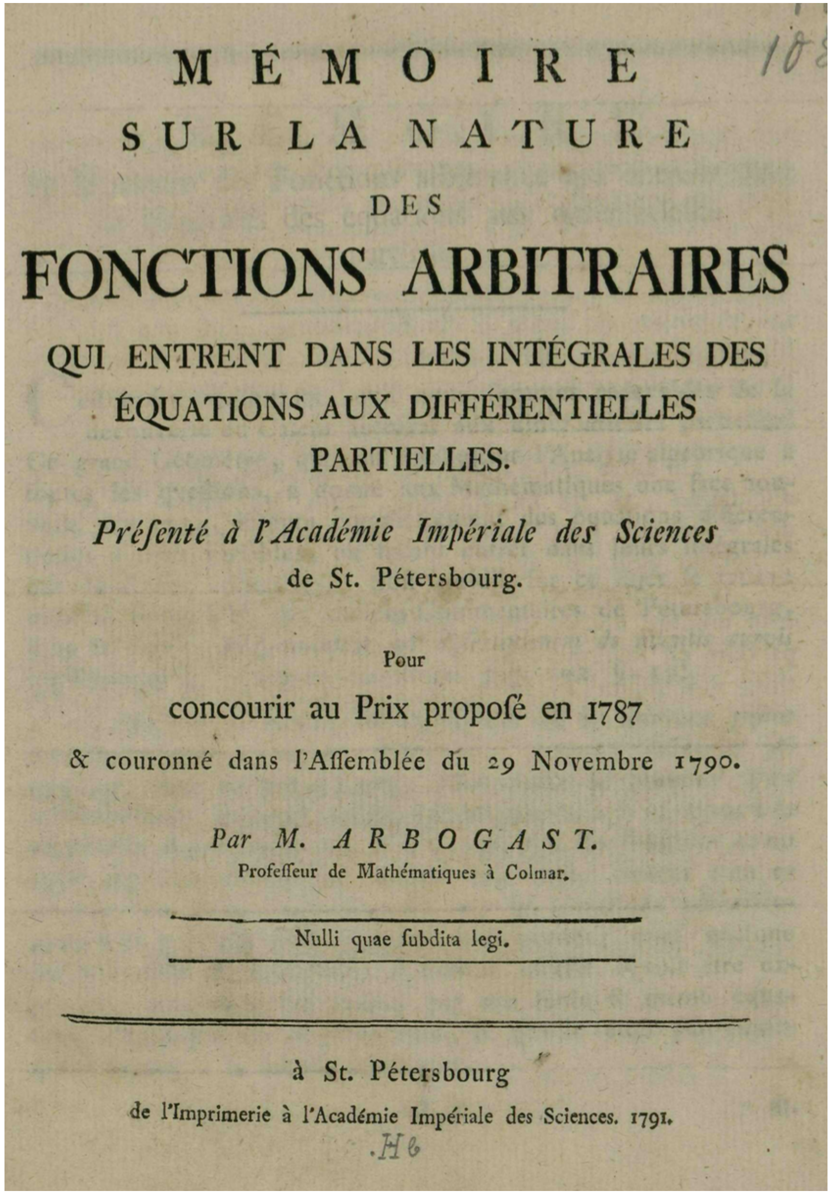
a straight line, and conversely a curve can define a function. Hence the nature of each curve is expressed by the function of x, determined by projecting M onto P which lies on the line RS. The length of the interval AP is the value of x, while the corresponding value of the function is the length of the perpendicular PM.

9. From this concept of a curve, there follows immediately a division into *continuous* and *discontinuous* or *mixed*. A *continuous* curve is one such that its nature can be expressed by a single function of x. If the curve is of such a nature that for its various parts, BM, MD, DM, etc. different functions of x are required for its expression, that is, after one part BM is defined by one function of x, then another function is required to express the part MD, then we call such a curve *discontinuous* or *mixed* and *irregular*. This is because such a curve cannot be expressed by one constant law, but is formed from several continuous parts.

Eulero: Una nuova definizione di funzione 1755

Quae autem quantitates hos modo ab aliis pendent ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant , eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet , atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae vtcunque ab x pendent, seu per eam determinantur, eius functiones vocantur.

Arbogast 1787, Premio dell'Accademia di San Pietroburgo



MÉMOIRE

SUR LA NATURE

DES

FONCTIONS ARBITRAIRES

QUI ENTRENT DANS LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.

Préſenté à l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.

Pour concourir au Prix propoſé en 1787 & couronné dans l'Aſſemblée du 29 Novembre 1790.

Par M. ARBOGAST.

Profeſſeur de Mathématiques à Colmar.

Nulli quae ſubdita legi.

à St. Pétersbourg

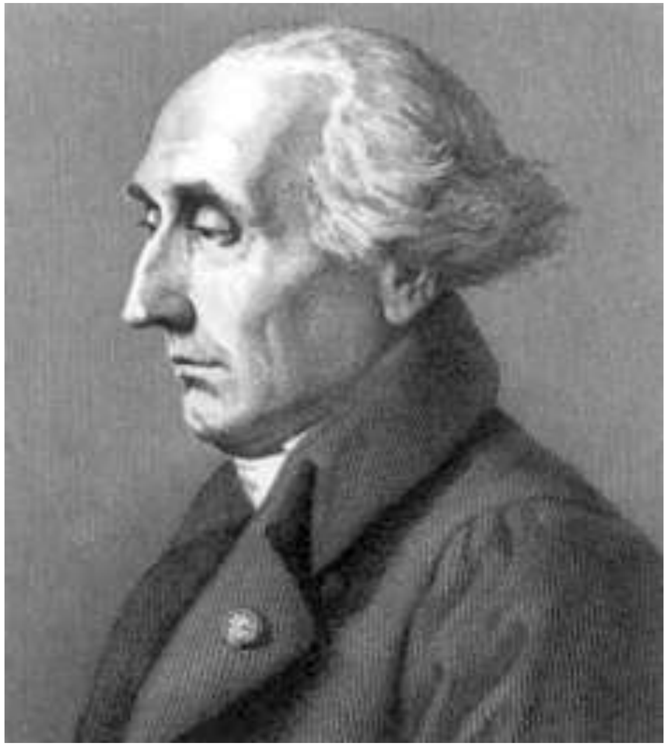
de l'Imprimerie à l'Académie Impériale des Sciences. 1791.

"La legge di continuità consiste nel fatto che una quantità non può passare da uno stato a un altro senza passare attraverso tutti gli stati intermedi che sono soggetti alla stessa legge. Le funzioni algebriche sono considerate continue, poiché i differenti valori di queste funzioni dipendono nella stessa maniera da quelli della variabile, e supponendo che la variabile cresca continuamente, la funzione subirà variazioni in modo corrispondente, ma tuttavia non passerà da un valore a un altro senza passare attraverso tutti i valori intermedi. Quindi l'ordinata y di una curva algebrica, quando l'ascissa x varia, non può passare bruscamente da un valore a un altro; non ci può essere un salto fra una ordinata e un'altra che differisce da essa di una quantità prefissata, ma tutti i successivi valori di y devono essere collegati tra loro da una stessa legge (...)
Questa continuità può essere vanificata in due modi:
I) La funzione può cambiare la sua forma, vale a dire la legge secondo cui la funzione dipende dalla variabile può cambiare del tutto. Una curva formata dall'unione di alcune porzioni di curve differenti è di questo tipo.

Arbogast 1787, Premio dell'Accademia di San Pietroburgo

"Non è neppure necessario che la funzione y debba essere espressa da un'equazione in un certo intervallo della variabile; essa può continuamente cambiare la sua forma e la linea che la rappresenta, al posto di essere l'unione di curve regolari, può essere tale che in ognuno dei suoi punti diventi una curva differente, in altre parole può essere interamente irregolare e non seguire alcuna legge per ogni intervallo comunque piccolo. Tale sarebbe una curva tracciata a caso dal libero movimento della mano. Questo tipo di curve non può essere rappresentato né da una né da più equazioni algebriche o trascendenti (...) 2) La legge di continuità viene meno anche quando le differenti parti di una curva non si congiungono tra loro (...)"

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) (Giuseppe Luigi Lagrangia)



- Lagrange nasce a Torino 1736
- Nel 1766, su proposta di Eulero e D'Alembert, viene chiamato a succedere a Eulero come presidente della classe di scienze dell'Accademia delle scienze di Berlino
- Nel 1787 si trasferisce a Parigi dove viene eletto direttore della sezione matematica della *Académie des sciences*
- Dal 1797 insegna alla *École polytechnique*
- Muore a Parigi nel 1813

Théorie des fonctions analytiques, 1797 (Anno V)

THÉORIE

DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

LES PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL,

DÉGAGÉS DE TOUTE CONSIDÉRATION

D'INFINIMENT PETITS OU D'ÉVANOUISSANS,

DE LIMITES OU DE FLUXIONS,

ET RÉDUITS

A L'ANALYSE ALGÉBRIQUE

DES QUANTITÉS FINIES;

Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut national.

THÉORIE
DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies.

PREMIÈRE PARTIE.

Exposition de la Théorie, avec ses principaux usages dans l'Analyse.

---

1. ON appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

2. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f, ou F; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée

L'idea di fondo dell'approccio di Lagrange ai fondamenti dell'analisi consiste nel considerare una funzione $f(x)$ e il suo sviluppo in serie di potenze:

$$f(x+i) = f(x) + p(x)i + q(x)i^2 + r(x)i^3 + \dots .$$

La funzione derivata $f'(x)$ (notazione e denominazione sono dovute proprio a Lagrange) è definita come il coefficiente del termine di primo grado in i in tale sviluppo. Per definizione la seconda funzione derivata $f''(x)$ è il coefficiente di i nello sviluppo di $f'(x+i)$ e così via.
In §16 Lagrange connette i coefficienti $q, r, \dots$ con le funzioni derivate di ordine superiore al primo.