Théorie des fonctions analytiques, 1797 (Anno V)

THÉORIE

DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

LES PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL,

DÉGAGÉS DE TOUTE CONSIDÉRATION

D'INFINIMENT PETITS OU D'ÉVANOUISSANS,

DE LIMITES OU DE FLUXIONS,

ET RÉDUITS

A L'ANALYSE ALGÉBRIQUE

DES QUANTITÉS FINIES;

Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut national.

Théorie des fonctions analytiques, 1797 (Anno V)

THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies.

PREMIÈRE PARTIE.

Exposition de la Théorie, avec ses principaux usages dans l'Analyse.

---

1. ON appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

2. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f, ou F; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée

Théorie des fonctions analytiques, 1797 (Anno V)

L'idea di fondo dell'approccio di Lagrange ai fondamenti dell'analisi consiste nel considerare una funzione $f(x)$ e il suo sviluppo in serie di potenze:

$$f(x+i) = f(x) + p(x)i + q(x)i^2 + r(x)i^3 + \dots .$$

La funzione derivata $f'(x)$ (notazione e denominazione sono dovute proprio a Lagrange) è definita come il coefficiente del termine di primo grado in i in tale sviluppo. Per definizione la seconda funzione derivata $f''(x)$ è il coefficiente di i nello sviluppo di $f'(x+i)$ e così via.
In §16 Lagrange connette i coefficienti $q, r, \dots$ con le funzioni derivate di ordine superiore al primo.

Sostituendo nel precedente sviluppo $i + o$ al posto di i si ha:

$$\begin{aligned} f(x+i+o) &= f(x) + (i+o)p + (i+o)^2 q + (i+o)^3 r + \ldots = \\ &= f(x) + ip + i^2 q + i^3 r + \ldots + op + 2ioq + 3i^2 or + 4i^3 os + \ldots . \end{aligned} \tag{5}$$

Ora, rimpiazziamo x con $x + o$. $f(x), p, q, r$ diventano rispettivamente:

$$f(x) + op + \ldots, \quad p + op' + \ldots, \quad q + oq' + \ldots, \quad r + or' + \ldots .$$

Se ora incrementiamo $x+o$ di i si ottiene (osservando che $x+i+o = (x+o)+i$):

$$f(x+i+o) = f(x) + op + \ldots + i(p + op' + \ldots) + i^2(q + oq' + \ldots) + \ldots ;$$

Il confronto delle due espressioni per $f(x + i + o)$ restituisce infine:

$$q = \frac{1}{2}p', \qquad r = \frac{1}{3}q', \qquad s = \frac{1}{4}r', \ldots$$

Un esempio: $f(x) = 1/x$

Sia $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Sarà: $f(x+i) - f(x) =: iP = -\dfrac{i}{x(x+i)}$. Posto $P = p + iQ$, si ha: $p = -\dfrac{1}{x^2}$. Proseguendo, si ha: $Q = \dfrac{P-p}{i}$. Sia q il valore di Q che si ottiene ponendo $i = 0$, allora si ottiene: $q = \dfrac{1}{x^3}$, ecc..

Jean Baptiste Joseph Fourier 1768-1830

THÉORIE

ANALYTIQUE

DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

Dopo un attento e prolungato studio sono giunto alla conclusione che, per determinare numericamente i più vari movimenti del calore, è sufficiente sottomettere ogni sostanza a tre osservazioni fondamentali. Corpi diversi infatti non possiedono nella stessa misura la capacità di contenere calore, di riceverlo o trasmetterlo attraverso le loro superfici e neppure di condurlo all'interno della massa. Queste sono tre qualità specifiche che la nostra teoria individua chiaramente e ci permette di misurare.

Jean Baptiste Joseph Fourier 1768-1830

Le equazioni differenziali della propagazione del calore esprimono le condizioni più generali, e riducono le questioni fisiche e problemi di analisi pura e questa è l'oggetto vero e proprio della teoria (...) Dopo aver stabilito queste equazioni differenziali, bisognava ottenerne gli integrali; il che consiste nel passare da un'espressione generale (*commune*) a una soluzione specifica (*propre*) soggetta a tutte le condizioni date. Questa ricerca difficile esigeva un'analisi speciale, fondata su teoremi nuovi (...) Il metodo che ne deriva non lascia niente di vago e di indeterminato nelle soluzioni e le porta fino alle ultime applicazioni numeriche, condizione necessaria di ogni ricerca e senza la quale non si arriverebbe che a delle inutili trasformazioni (...) Lo studio profondo della natura è la fonte più fertile delle scoperte matematiche. Questo studio non ha solo il vantaggio, presentando un oggetto ben determinato di indagine, di escludere questioni vaghe e calcoli senza scopo; esso è inoltre un metodo sicuro per costituire l'analisi stessa e per scoprire gli elementi che ci interessa conoscere e che le scienze naturali devono sempre preservare: questi sono gli elementi fondamentali che si ripresentano in tutti i fenomeni naturali.

Gli effetti del calore sono soggetti a leggi costanti che non possono essere scoperte senza l'ausilio dell'analisi matematica. L'oggetto della teoria che ci accingiamo a esporre è di dimostrare queste leggi; essa riduce tutte le ricerche fisiche sulla propagazione del calore a problemi di calcolo integrale i cui elementi sono dati dall'esperimento. Nessun soggetto è in relazione più ampia col progresso dell'industria e delle scienze naturali.

Dal manoscritto del 1807

L'equazione generale della propagazione del calore nei corpi solidi è dunque la seguente:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

v è una funzione delle tre coordinate x, y, z e del tempo t, K è la misura della conducibilità propria della sostanza di cui è formato il corpo, C è il calore specifico di questa sostanza e D la sua densità. Il senso proprio di questa equazione è che la funzione v deve soddisfare alla condizione generale che vi è espressa. Ma, indipendentemente da questa condizione generale per ogni caso, vi sono diverse altre condizioni particolari che dipendono dalla forma del corpo, dalla natura e dalla forma della superficie, dall'azione di una o pi sorgenti di calore e da diverse altre circostanze che si possono presentare nei singoli casi.

Jean Baptiste Joseph Fourier 1768-1830

Jean Baptiste Joseph Fourier 1768-1830

Augustine Louis Cauchy, 1789-1857

- Nasce a Parigi il 21 agosto del 1789. Dopo aver ricevuto una precoce educazione da suo padre che contava tra i suoi amici Lagrange e Laplace, Cauchy entra all'École centrale du Panthéon nel 1802, all'École Polytechnique nel 1805 ed infine all'École nationale des ponts et chaussées nel 1807. Divenuto ingegnere, lascia Parigi per Cherbourg nel 1810, ma ritorna nella capitale 1813 per motivi di salute.
- Lagrange e Laplace lo persuadono a rinunciare all'ingegneria e a dedicarsi completamente alla matematica pura. Le sue qualità gli valgono le cattedre alla stessa École polytechnique, al Collège de France e alla Sorbona. Intransigente legittimista, nel 1830, rifiuta di giurare fedeltà agli Orléans ed è per questo costretto a lasciare l'insegnamento e a recarsi in esilio, prima in Svizzera poi a Torino come docente di fisica sublime all'università (1831).
- Nel 1833 si trasferisce a Praga come di precettore del conte di Chambord, nipote di Carlo X. Grazie a questo ruolo, Cauchy ha la possibilità di viaggiare, scoprendo quanto bene i suoi lavori siano stati accolti. Carlo X lo nomina barone in ringraziamento per i suoi servigi. Ritorna in Francia nel 1838, dove comincia ad insegnare in vari istituti religiosi, fino a quando, dispensato da Napoleone III dal giuramento alla repubblica, può riprendere la cattedra di fisica matematica alla Facoltà di Scienze della Sorbona. Muore a Sceaux, Seine, il 23 maggio del 1857.

- Una quantità variabile è una quantità che si considera come suscettibile di ricevere successivamente molti valori distinti [...]. Al contrario, una quantità costante è una quantità che riceve un unico valore fissato e determinato.
- Quando i valori attribuiti alla stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato in maniera tale che essi finiscono per differirvi per tanto poco quanto si vuole, quest'ultimo valore è detto il *limite* di tutti gli altri.
- Quando i valori numerici successivi attribuiti alla stessa variabile decrescono indefinitamente in maniera tale che essi sono minori di un qualunque numero [positivo] dato, questa variabile diventa ciò che si chiama un *infinitesimo* o una quantità infinitamente piccola. Una variabile di questo tipo ha come limite zero.

Sia $f(x)$ una funzione della variabile x e si supponga che per ogni valore di x fra due limiti dati questa funzione assuma sempre un unico valore finito. Se, partendo da un valore di x compreso tra questi limiti, si attribuisce alla variabile x un accrescimento infinitamente piccolo α, la funzione riceverà per accrescimento la differenza:

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

che dipenderà allo stesso tempo dalla nuova variabile α e dal valore di x. Ciò posto, la funzione $f(x)$ sarà, entro i due limiti assegnati alla variabile x, funzione *continua* di questa variabile, se per ogni valore di x compreso fra questi limiti, il valore numerico,

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

decresce indefinitamente con quello di α. [...]

In altri termini, *la funzione $f(x)$ rimarrà continua rispetto a x compreso fra i limiti dati, se, entro questi limiti, un accrescimento infinitamente piccolo della variabile produce sempre un accrescimento infinitamente piccolo della funzione stessa.*
Come si vede, Cauchy non definisce la continuità in un punto ma piuttosto la continuità in un intervallo. Ma di quale continuità si tratta? Continuità puntuale o continuità uniforme? Dall'utilizzo che Cauchy fa della nozione sembra lecito sostenere che la sua definizione coincida con quella di continuità uniforme. In ogni caso, gli storici non concordano sulla questione.

§. 2.e *De la continuité des Fonctions.*

Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction* $f(x)$ *restera continue par rap-*

Il *Cours d'Analyse*, 1821

port à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très-rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors *discontinue*, et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité.*

CHAPITRE VI.

Des Séries convergentes et divergentes. Règles sur la convergence des Séries. Sommation de quelques Séries convergentes.

§. 1.er *Considérations générales sur les Séries.*

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; u_3, \; \&c. \ldots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différens *termes* de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce

Il criterio di Cauchy

CHAPITRE VI.

Des Séries convergentes et divergentes. Règles sur la convergence des Séries. Sommation de quelques Séries convergentes.

§. 1.er *Considérations générales sur les Séries.*

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \&c. \ldots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différens *termes* de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce

- Definizione di "serie": una successione infinita di quantità: u_0, u_1, u_2, ecc. (Propriamente, Cauchy chiama serie ciò che oggi chiamiamo "successione").
- La serie è detta convergente se la somma $s_n = u_0 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ si avvicina indefinitamente a un limite s. In caso contrario è detta divergente.
- u_n è il termine generale.
- "Perché la serie $u_0, u_1, u_2, \ldots$ sia convergente è necessario che il termine generale decresca indefinitamente."
- "Ma questa condizione non è sufficiente. Occorre anche che per valori crescenti di n, le differenti somme $u_n + u_{n+1} = s_{n+2} - s_n, u_n + u_{n+1} + u_{n+2} = s_{n+3} - s_n, \ldots$" tendano "a valori numerici inferiori ad ogni limite assegnabile"

Un risultato controverso

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différens termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable;

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissemens que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très-considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

1.^{er} Théorème. *Lorsque les différens termes de la série* (1) *sont des fonctions d'une même variable* x,

1 *

Quando i differenti termini della serie $u_1(x), u_2(x), \dots$ sono delle funzioni di una stessa variabile x, continue rispetto a questa variabile nell'intorno di un valore particolare per il quale la serie è convergente, la somma S della serie è pure, nell'intorno di questo valore particolare, una funzione continua di x

Un risultato controverso

Cauchy osserva in primo luogo che la funzione $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x)$ è continua (perché somma di funzioni continue). Quindi considera gli accrescimenti che le funzioni $S(x), R_n(x), S_n(x)$, dove $R_n(x) := S(x) - S_n(x)$ allorquando la variabile x subisce un accrescimento infinitesimo α.

s'agit. Cela posé, considérons les accroissemens que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très-considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

Che cosa non va nel ragionamento di Cauchy?

Per dimostrare la continuità di $S(x)$ in un punto $x = a$ occorre dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un δ tale che $|x - a| < \delta$ implica $|S(x) - S(a)| < \epsilon$.
L'argomento di Cauchy può essere così tradotto. Vale:

$$|S(x)-S(a)| = |S_n(x)+R_n(x)-S_n(a)-R_n(a)| \leq |S_n(x)-S_n(a)|+|R_n(x)-R_n(a)|,$$

Ora, $|S_n(x) - S_n(a)|$ può essere reso arbitrariamente piccolo, diciamo minore di $\epsilon/2$ (pur di prendere x sufficientemente vicino a a); allo stesso modo, anche $|R_n(x) - R_n(a)|$ può essere preso minore di $\epsilon/2$ per n grande, ne segue che $|S(x) - S(a)| < \epsilon$.
Il punto delicato è però che i due termini $|S_n(x) - S_n(a)|, |R_n(x) - R_n(a)|$ non possono essere resi arbitrariamente piccoli allo stesso tempo.

Consideriamo l'esempio:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+kx^2)(1+(k-1)x^2)}.$$

Si ha $S_n(0) = 0$, per ogni n e quindi $S(0) = 0$. Se $x \neq 0$:

$$S_n(x) = \frac{x^2}{1/n + x^2}.$$

Dunque $S(x) = 1$, per $x \neq= 0$. La serie è discontinua in 0. Infatti se richiediamo che ciascuno dei termini $|S_n(x) - S_n(0)| = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$, $|R_n(x)| = \dfrac{1}{1+nx^2}$ è minore di $\epsilon/2$, abbiamo per il primo: $|x| < \sqrt{\epsilon/(2n - \epsilon n)}$ e per il secondo (essendo $R_n(0) = 0$): $n > \dfrac{2-\epsilon}{\epsilon x^2}$. Ecco il problema: possiamo scegliere il primo termine piccolo prendendo x vicini a zero, ma questa scelta fa crescere $\dfrac{1}{1+nx^2}$. Allo stesso modo, possiamo ridurre $|R_n(x)|$ prendendo n grande, ma ciò farà tendere il primo termine a 1. La soluzione per garantire la continuità della somma è la richiesta dell'uniforme convergenza della serie: $|R_n(x)|$ deve tendere a zero indipendentemente da x.

Il paragrafo 470 contiene una interessante trattazione sull'integrale definito, da intendersi come somma di contributi infinitesimi, e la sua relazione con la nozione di antiderivata.

$$\mathrm{l}(1+n\cos z)=-\mathrm{l}\frac{2m}{1}+\frac{2}{1}m\cos z-\frac{2}{2}m^2\cos 2z+\frac{2}{3}m^3\cos 3z-\text{etc.}$$

d'où il résultera

$$\int dz\,\mathrm{l}(1+n\cos z)=-z\mathrm{l}\frac{2m}{1}+\frac{2m}{1}\sin z-\frac{2}{4}m^2\sin 2z+\frac{2}{9}m^3\sin 3z$$
$$-\frac{2}{16}\sin 4z+\frac{2}{25}\sin 5z-\text{etc.}+\mathit{const.}$$

469. Le développement de $\mathrm{l}(1+n\cos z)^m$, trouvé dans le n°. précéd. conduit à plusieurs séries très-remarquables; en y supposant $n=+1$ et $n=-1$, ce qui donne $m=1$ et $m=-1$, on trouve

$$\mathrm{l}(1+\cos z)=-\mathrm{l}2+\tfrac{2}{1}\cos z-\tfrac{2}{2}\cos 2z+\tfrac{2}{3}\cos 3z-\tfrac{2}{4}\cos 4z+\text{etc.}$$
$$\mathrm{l}(1-\cos z)=-\mathrm{l}2-\tfrac{2}{1}\cos z-\tfrac{2}{2}\cos 2z-\tfrac{2}{3}\cos 3z-\tfrac{2}{4}\cos 4z+\text{etc.}$$

et comme $1+\cos z=2(\cos\frac{1}{2}z)^2$, $1-\cos z=2(\sin\frac{1}{2}z)^2$ (Int. n^{os}. 42, 43) on a

$$\mathrm{l}\cos\tfrac{1}{2}z=-\mathrm{l}2+\tfrac{1}{1}\cos z-\tfrac{1}{2}\cos 2z+\tfrac{1}{3}\cos 3z-\tfrac{1}{4}\cos 4z+\text{etc.}$$
$$\mathrm{l}\sin\tfrac{1}{2}z=-\mathrm{l}2-\tfrac{1}{1}\cos z-\tfrac{1}{2}\cos 2z-\tfrac{1}{3}\cos 3z-\tfrac{1}{4}\cos 4z-\text{etc.}$$

d'où il résulte

$$\mathrm{l}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}z=-\tfrac{2}{1}\cos z-\tfrac{2}{3}\cos 3z-\tfrac{2}{5}\cos 5z-\tfrac{2}{7}\cos 7z-\text{etc.}$$

470. Le développement des intégrales en série, ne conduit à une approximation que dans le cas où les séries qu'on obtient sont convergentes, ce qui n'arrive pas toujours; c'est pourquoi les Analystes ont cherché les moyens de parvenir à des valeurs approchées des intégrales, quelles que soient les fonctions différentielles proposées. Nous allons exposer ici celui qu'Euler a donné dans son traité de Calcul Intégral.

Méthode générale pour obtenir les valeurs approchées des intégrales.

Soit $X dx$ la différentielle à intégrer; $\int X dx$ est une quantité indéterminée dans un certain sens, puisqu'elle doit renfermer une constante arbitraire (n°. 359): c'est encore ce que les considérations

Lacroix, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, 1797-1800

suivantes vont confirmer. Si on fait $\int X dx = y$, on aura

$$\frac{dy}{dx}=X,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dX}{dx},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2X}{dx^2},\ \text{etc.}$$

mais la connoissance de ces coefficiens différentiels ne suffit pas pour déterminer le développement de y par le théorême de Taylor; il faut encore y joindre celle de la valeur particulière de y, lorsque $x=0$ (n°. 100). Tout ce qu'on peut donc faire au moyen des expressions données de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. c'est de passer de la valeur de $\int X dx$, prise pour une certaine valeur particulière de x, à celle qui répond à une autre valeur de x.

Soit par exemple Y la valeur de $\int X dx$, correspondante à $x=a$ et Y_1 celle qui est relative à $x=a_1$; on fera dans la formule du n°. 12, $x=a$, $k=a_1-a$, et désignant par Y', Y'', Y''', etc. les valeurs de X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$, etc. prises dans l'hypothèse de $x=a$, il en résultera

$$Y_1=Y+Y'\frac{(a_1-a)}{1}+Y''\frac{(a_1-a)^2}{1.2}+Y'''\frac{(a_1-a)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

On voit par cette formule que si aucun des coefficiens Y, Y', Y'', Y''', etc. ne devient infini, et que a_1 soit très-peu différent de a, on pourra déterminer assez exactement la valeur de Y_1.

Nommant Y_2 la valeur de $\int X dx$, relative à une troisième valeur de x, désignée par a_2, et représentant par Y'_1, Y''_1, Y'''_1, etc. ce que deviennent X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$, etc. lorsque $x=a_1$, on aura

$$Y_2=Y_1+Y'_1\frac{(a_2-a_1)}{1}+Y''_1\frac{(a_2-a_1)^2}{1.2}+Y'''_1\frac{(a_2-a_1)^3}{1.2.3}+,\ \text{etc.}$$

On peut continuer de la même manière pour une suite de valeurs de x, représentées par a_3, a_4, etc. auxquelles on suppose répondre des valeurs de $\int X dx$, désignées par Y_3, Y_4, etc.

Concevons pour un moment qu'on ait pris chacune des quantités a_1, a_2, a_3, a_4, etc. assez peu différente de celle qui la précède, pour que le quarré et les puissances supérieures de a_1-a, a_2-a_1, a_3-a_2, etc. puissent être négligés sans erreur sensible, il en résulte

résultera ces approximations:

$$Y_1=Y+Y'(a_1-a)$$
$$Y_2=Y_1+Y'_1(a_2-a_1)$$
$$Y_3=Y_2+Y'_2(a_3-a_2)$$
$$Y'_4=Y_3+Y'_3(a_4-a_3)$$

etc.

En mettant successivement la valeur de Y_1 dans celle de Y_2, celle de Y_2 dans celle de Y_3, et ainsi de suite, on trouvera

$$Y_1=Y+Y'(a_1-a)$$
$$Y_2=Y+Y'(a_1-a)+Y'_1(a_2-a_1)$$
$$Y_3=Y+Y'(a_1-a)+Y'_1(a_2-a_1)+Y'_2(a_3-a_2)$$
$$Y_4=Y+Y'(a_1-a)+Y'_1(a_2-a_1)+Y'_2(a_3-a_2)+Y'_3(a_4-a_3)$$

etc.

On peut s'élever de cette manière à une expression approchée de $\int X dx$, relative à telle valeur de x qu'on voudra.

Posons que a_n représente le dernier terme de la série a, a_1, a_2... et que Y_n soit la valeur de $\int X dx$, correspondante à $x=a_n$; il est évident, d'après les valeurs précédentes, que l'expression approchée de Y_n se formera en poussant jusqu'au terme $Y'_{n-1}(a_n-a_{n-1})$, dans lequel Y'_{n-1} désigne ce que devient X lorsqu'on y met a_{n-1} pour x: on aura donc

$$Y_n=Y+Y'(a_1-a)+Y'_1(a_2-a_1)+Y'_2(a_3-a_2)\ldots+Y'_{n-1}(a_n-a_{n-1}).$$

Si les différences a_1-a, a_2-a_1, a_3-a_2, etc. sont toutes égales à α, la valeur précédente de Y_n deviendra

$$Y_n=Y+\alpha(Y'+Y'_1+Y'_2+\ldots.Y'_{n-1}).$$

Ces valeurs seront d'autant plus exactes que les quantités a, a_1, a_2 seront plus voisines les unes des autres. En regardant les différences a_1-a, a_2-a_1, a_3-a_2, comme infiniment petites, les quantités $Y'(a_1-a)$, $Y'_1(a_2-a_1)$, $Y'_2(a_3-a_2)$, etc. seront ce que devient la différentielle $X dx$, lorsqu'on fait successivement $x=a$, $x=a_1$, $x=a_2$, etc. C'est sous ce point de vue que l'on conçoit l'intégrale comme la somme d'un nombre infini d'élémens, égaux aux valeurs consécutives que prend la différentielle par les divers changemens qu'éprouve la variable x (voyez la note, page 2 de ce vol.).

471. Les considérations précédentes font voir bien clairement en quoi l'intégrale $\int X dx$ diffère d'une fonction primitive donnée,

Calcul intégral. S

Xdx è il differenziale da integrare. Ciò significa trovare $y(x)$ tale che $dy = Xdx$. Sarà pertanto:

$$\frac{dy}{dx} = X, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dX}{dx}, \quad \text{ecc.}$$

Lacroix osserva che la conoscenza della funzione X non è sufficiente a determinare lo sviluppo di Taylor di $y(x)$. È però possibile ricavare la differenza tra due valori di $\int Xdx$ in corrispondenza di due valori di x.

Consideriamo una generica primitiva di X e indichiamola con $F(x) = F(x, c)$. (È implicito nel ragionamento di Lacroix che tale funzione sia definita in un dato intervallo di $\mathbb{R}$ e che i punti $a, a_1, \ldots$ qui di seguito considerati appartengano a tale intervallo). Introduciamo le seguenti notazione:

$$Y = F(a), Y' = X(a), Y'' = \left(\frac{dX}{dx}\right)_a, Y''' = \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_a, \ldots$$

$$Y_1 = F(a_1), Y_1' = X(a_1), Y_1'' = \left(\frac{dX}{dx}\right)_{a_1}, Y_1''' = \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{a_1}, \ldots$$

$$Y_2 = F(a_2), Y_2' = X(a_2), Y_2'' = \left(\frac{dX}{dx}\right)_{a_2}, Y_2''' = \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{a_2}, \ldots$$

$$\ldots$$

Sviluppando in serie di potenze si avrà:

$$Y_1 = Y + Y'(a_1 - a) + \frac{Y''}{2}(a_1 - a)^2 + \dots$$

$$Y_2 = Y_1 + Y_1'(a_2 - a_1) + \frac{Y_1''}{2}(a_2 - a_1)^2 + \dots$$

$$\vdots$$

Arrestandosi al primo ordine e con sostituzioni successive, si ottiene (al passo n):

$$Y_n = Y + Y'(a_1 - a) + Y_1'(a_2 - a_1) + Y_2'(a_3 - a_2) + Y_3'(a_4 - a_3) + \dots + Y_{n-1}'(a_n - a_{n-1}).$$

Questa relazione sarà tanto più "esatta" quanto minore sono le differenze $a_k - a_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$. Assumendo che le differenze $a_k - a_{k-1}$ siano tutte uguali a α, si ha, per $\alpha \to 0$:

$$Y_n - Y = \alpha(Y' + Y_1' + \dots + Y_{n-1}') \to \int Xdx.$$

Si ricordi che: $Y' = X(a)$, $Y_1', = X(a_1), \dots$. Nella riga precedente $\int Xdx$ designa ovviamente $\int_a^{a_n} Xdx$. Si noti però che Lacroix non usa tale notazione (che si deve invece a Fourier).

Integrali del tipo $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x}$ pongono problemi.

les intégrales $\int \frac{dx}{x^m}$, dans lesquelles m est un nombre pair. Dans l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$, prise aussi depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, les élémens passent du positif au négatif, et les parties infinies peuvent se détruire ; mais alors il semblerait que l'intégrale devrait être nulle, et au contraire, elle est égale à la quantité imaginaire $-\log.(-1)$: ce logarithme a, comme on sait, une infinité de valeurs comprises sous la forme $(2n+1)\pi\sqrt{(-1)}$, n étant un nombre entier positif ou négatif, et π représentant toujours le rapport de la circonférence au diamètre ; or, on ne voit pas d'abord comment la somme des élémens de l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$, qui sont tous réels, peut avoir plusieurs valeurs, et encore moins comment ces valeurs sont imaginaires.

Poisson, *Suite du mémoire sur les intégrales définies*, 1820

Pour éclaircir ces difficultés, remontons à l'origine des intégrales définies, et considérons l'intégrale $\int fx dx$, dans laquelle fx est une fonction quelconque de x. Désignons par Fx une autre fonction dont $fx\,dx$ soit la différentielle; en sorte qu'on ait

$$\int fx\,dx = Fx + c,$$

c étant une constante arbitraire. Si l'on détermine cette constante, de manière que l'intégrale s'évanouisse quand $x = a$, on aura

$$Fa + c = 0 \quad \text{ou} \quad c = -Fa;$$

et si l'on donne ensuite à x la valeur déterminée $x = b$, on a

$$\int fx\,dx = Fb - Fa.$$

Cette quantité $Fb - Fa$ est ce qu'on appelle l'intégrale *définie*, prise depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, tandis que $Fx + c$ est l'intégrale générale ou indéfinie.

[35.] Le théorème que nous venons d'énoncer dans le n.° 33, pouvant être regardé comme la proposition fondamentale de la théorie des intégrales définies, il ne sera pas déplacé d'en donner ici la démonstration. Désignons donc par y et $y+z$ deux valeurs de x comprises entre les limites a et b; comme on a $d.Fx = fx\,dx$, et comme on suppose que fx ne devient point infinie entre ces limites, il en résulte que si l'on développe $F(y+z)$ suivant les puissances de z, les deux premiers termes de la série seront toujours $Fy + zfy$: on pourra de plus désigner le reste du développement par Rz^{1+k}, R étant une fonction de y et z qui ne devient infinie pour aucune valeur de ces quantités, et k un exposant positif quelconque; de cette manière, on aura donc

$$F(y+z) = Fy + zfy + Rz^{1+k}.$$

Cauchy: il calcolo integrale

In questa memoria consideriamo ogni integrale definito come la somma dei valori indefinitamente piccoli delle espressioni differenziali poste sotto $\int$, che corrispondono ai diversi valori della variabile compresi tra i limiti in questione. Se adottiamo questa maniera di considerare gli integrali definiti proviamo facilmente che ogni siffatto integrale ha un unico valore finito ogni volta che, essendo i due limiti della variabile finiti, l'integranda si mantiene finita e continua tra questi limiti" (Cauchy, 1823, *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires...*).

Cauchy: il calcolo integrale

Noi siamo naturalmente portati dalla teoria delle quadrature a considerare ogni integrale definito, preso tra due limiti reali, come la somma dei valori infinitesimi della espressione differenziale sotto il segno $\int$ corrispondono ai diversi valori reali della variabile che sono compresi tra i limiti in questione. Ora, a me sembra che questo modo di considerare un integrale definito debba essere preferibilmente adottato, come io appunto ho fatto, poiché è ugualmente adatto, in ogni caso, anche a quelli in cui non possiamo generalmente passare dalla funzione sotto il segno $\int$ alla funzione primitiva. Inoltre, ha il vantaggio di fornire sempre valori reali per gli integrali corrispondenti a funzioni reali. Infine ci permette facilmente di separare ogni equazione immaginaria in due equazioni reali. Questo potrebbe non essere più tanto vero se consideriamo un integrale definito preso tra due limiti reali come necessariamente equivalente alla differenza negli estremi di integrazione di una funzione primitiva discontinua o se facciamo percorrere alla variabile per andare da un estremo all'altro, una successione di valori immaginari. (Cauchy, 1823, *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires...*).

VINGT-UNIÈME LEÇON.

Intégrales définies.

SUPPOSONS que, la fonction $y=f(x)$ étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x=x_0$, $x=X$, on désigne par x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$ de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs, pour diviser la différence $X-x_0$ en élémens

$$(1) \qquad x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ x_3-x_2,\ \ldots\ X-x_{n-1},$$

qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'*origine* de ce même élément, savoir, l'élément x_1-x_0 par $f(x_0)$, l'élément x_2-x_1 par $f(x_1)$, &c.., enfin l'élément $X-x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$; et soit

$$(2) \qquad S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

la somme des produits ainsi obtenus. La quantité S dépendra évidemment, 1.° du nombre n des élémens dans lesquels on aura divisé la différence $X-x_0$, 2.° des valeurs mêmes de ces élémens, et par conséquent du mode de division adopté. Or, il importe de remarquer que, si les valeurs numériques des élémens deviennent très-petites et le nombre n très-considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influence insensible. C'est effectivement ce que l'on peut démontrer, comme il suit.

Si l'on supposait tous les élémens de la différence $X-x_0$ réduits à un seul qui serait cette différence elle-même, on aurait simplement

$$(3) \qquad S=(X-x_0)f(x_0).$$

Lorsqu'au contraire on prend les expressions (1) pour élémens de la différence $X-x_0$, la valeur de S, déterminée dans ce cas par l'équation (2), est égale à la somme des élémens multipliée par une moyenne entre les coefficiens

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots\ f(x_{n-1})$$

Il *Résumé*, 1823

[*voyez* dans les préliminaires du *Cours d'analyse*, le corollaire du 3.^e théor.]. D'ailleurs, ces coefficiens étant des valeurs particulières de l'expression

$$f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

qui correspondent à des valeurs de θ comprises entre zéro et l'unité, on prouvera, par des raisonnemens semblables à ceux dont nous avons fait usage dans la 7.^e leçon, que la moyenne dont il s'agit est une autre valeur de la même expression, correspondante à une valeur de θ comprise entre les mêmes limites. On pourra donc à l'équation (2) substituer la suivante

$$(4) \qquad S = (X - x_0)\, f[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

dans laquelle θ sera un nombre inférieur à l'unité.

Pour passer du mode de division que nous venons de considérer à un autre dans lequel les valeurs numériques des élémens de $X - x_0$ soient encore plus petites, il suffira de partager chacune des expressions (1) en de nouveaux élémens. Alors on devra remplacer, dans le second membre de l'équation (2), le produit $(x_1 - x_0)\, f(x_0)$ par une somme de produits semblables, à laquelle on pourra substituer une expression de la forme

$$(x_1 - x_0)\, f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)],$$

θ_0 étant un nombre inférieur à l'unité, attendu qu'il y aura entre cette somme et le produit $(x_1 - x_0)\, f(x_0)$ une relation pareille à celle qui existe entre les valeurs de S fournies par les équations (4) et (3). Par la même raison, on devra substituer au produit $(x_2 - x_1)\, f(x_1)$ une somme de termes qui pourra être présentée sous la forme

$$(x_2 - x_1)\, f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)],$$

θ_1 désignant encore un nombre inférieur à l'unité. En continuant de la sorte, on finira par conclure que, dans le nouveau mode de division, la valeur de S sera de la forme

$$(5) \quad S = (x_1 - x_0)\, f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)\, f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \ldots + (X - x_{n-1})\, f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})].$$

Si l'on fait dans cette dernière équation

$$f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] = f(x_0) \pm \varepsilon_0, \quad f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] = f(x_1) \pm \varepsilon_1, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] = f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1},$$

on en tirera

$$(6)\quad S=(x_1-x_0)[f(x_0)\pm\varepsilon_0]+(x_2-x_1)[f(x_1)\pm\varepsilon_1]+\ldots+(X-x_{n-1})[f(x_{n-1})\pm\varepsilon_{n-1}]$$

puis, en développant les produits,

$$(7)\quad S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$
$$\pm\varepsilon_0(x_1-x_0)\pm\varepsilon_1(x_2-x_1)\pm\ldots\pm\varepsilon_{n-1}(X-x_{n-1}).$$

Ajoutons que, si les élémens x_1-x_0, x_2-x_1, ... $X-x_{n-1}$ ont des valeurs numériques très-petites, chacune des quantités $\pm\varepsilon_0$, $\pm\varepsilon_1$, ... $\pm\varepsilon_{n-1}$ différera très-peu de zéro, et que par suite il en sera de même de la somme

$$\pm\varepsilon_0(x_1-x_0)\pm\varepsilon_1(x_2-x_1)\pm\ldots\pm\varepsilon_{n-1}(X-x_{n-1}),$$

qui est équivalente au produit de $X-x_0$ par une moyenne entre ces diverses quantités. Cela posé, il résulte des équations (2) et (7) comparées entre elles qu'on n'altérera pas sensiblement la valeur de S calculée pour un mode de division dans lequel les élémens de la différence $X-x_0$ ont des valeurs numériques très-petites, si l'on passe à un second mode dans lequel chacun de ces élémens se trouve subdivisé en plusieurs autres.

Concevons à présent que l'on considère à-la-fois deux modes de division de la différence $X-x_0$, dans chacun desquels les élémens de cette différence aient de très-petites valeurs numériques. On pourra comparer ces deux modes à un troisième tellement choisi, que chaque élément, soit du premier, soit du second mode, se trouve formé par la réunion de plusieurs élémens du troisième. Pour que cette condition soit remplie, il suffira que toutes les valeurs de x, interposées dans les deux premiers modes entre les limites x_0, X, soient employées dans le troisième, et l'on prouvera que l'on altère très-peu la valeur de S, en passant du premier ou du second mode au troisième, par conséquent, en passant du premier au second. Donc, lorsque les élémens de la différence $X-x_0$ deviennent infiniment petits, le mode de division n'a plus sur la valeur de S qu'une influence insensible; et, si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces élémens, en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par être sensiblement constante, ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$, et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce qu'on appelle une *intégrale définie*.

La seguente definizione è implicitamente contenuta nel testo:

Definition

Una funzione f è detta integrabile secondo Cauchy sull'intervallo $[a, b]$ e il suo integrale ha valore I se vale la seguente condizione. Per ogni $\epsilon > 0$ deve esistere un δ tale che, per ogni partizione

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \text{ con } |x_j - x_{j-1}| < \delta, \quad \forall \quad j = 1, \ldots, n,$$

valga:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) - I \right| < \epsilon.$$

Un tale I viene indicato con $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$.

Una funzione f è integrabile sull'intervallo $[a, b]$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un δ tale per cui, per ogni coppia di partizioni $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $a = x'_0 < x'_1 < \ldots < x'_n = b$ con

$$|x_j - x_{j-1}| < \delta, \quad |x'_j - x'_{j-1}| < \delta \quad \text{per ogni } j = 1, \ldots, n,$$

si ha:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x'_{j-1})(x'_j - x'_{j-1}) \right| < \epsilon.$$

Osservazione preliminare: per dimostrare l'integrabilità di f in base al criterio è sufficiente dimostrare che dato un ϵ è possibile trovare un δ tale che se $P_1 = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ è una qualunque partizione con norma minore di δ e P un suo raffinamento (qualunque), allora:

$$|S(P_1) - S(P)| < \epsilon/2.$$

Infatti, se così è, date

$$P_1 = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}\,, \quad P_2 = \left\{a = x_0, x_1', \dots, x_{n-1}', x_n\right\} = b,$$

possiamo scegliere $P = P_1 \cup P_2$ e ricavare che:

$$|S(P_2) - S(P_1)| < |S(P_2) - S(P)| + |S(P_1) - S(P)| < \epsilon/2 + \epsilon/2$$

Theorem

Le funzioni continue sono integrabili.

Sia f continua; dato ϵ dobbiamo costruire un δ tale che se P_1 ha norma minore di δ e P è un suo raffinamento allora $|S(P) - S(P_1)| < \epsilon/2$. Denotiamo gli elementi di P compresi nell'intervallo $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$ con:

$$x_{j-1} = x_{j,0}, x_{j,1}, \ldots, x_{j,d_j} = x_j.$$

Per il teorema del valor intermedio, esiste un $c_j, j = 1, \ldots, n$, tale che:

$$\sum_{k=1}^{d_j} f(x_{j,k})(x_{j,k} - x_{j,k-1}) = f(c_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Si avrà: $|S(P) - S(P_1)| < \sum_{j=1}^{n} |f(x_{j-1}) - f(c_j)|(x_j - x_{j-1})$. A questo punto interviene l'ipotesi di continuità (uniforme): esiste δ tale che se $|x_{j-1} - c_j| < \delta$ allora $|f(x_{j-1}) - f(c_j)| < \epsilon/2(b-a)$, $\forall j = 1, \ldots, n$. In tal caso:

$$|S(P) - S(P_1)| < \epsilon/2.$$

Notate che δ deve essere il medesimo per ogni sottointervallo.

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

Intégrales indéfinies.

SI, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple, la quantité X, l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x, qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'*origine* $x = x_0$. Soit

(1) $$\mathscr{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) [22.e leçon]

(2) $$\mathscr{F}(x) = (x - x_0) f[x_0 + \theta(x - x_0)], \quad \mathscr{F}(x_0) = 0,$$

θ étant un nombre inférieur à l'unité; et de la formule (7) [23.e leçon]

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx = \alpha f(x + \theta\alpha), \quad \text{ou}$$

(3) $$\mathscr{F}(x+\alpha) - \mathscr{F}(x) = \alpha f(x + \theta\alpha).$$

Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, la nouvelle fonction $\mathscr{F}(x)$ sera non-seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accroissement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $\mathscr{F}(x)$. Donc, si la fonction $f(x)$ reste finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, il en sera de même de la fonction $\mathscr{F}(x)$. Ajoutons que, si l'on divise par α les deux membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites,

(4) $$\mathscr{F}'(x) = f(x).$$

Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x, a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe $\int$ dans cette intégrale. On prouverait de la même manière que l'intégrale $\int_{x}^{X} f(x)\,dx = -\int_{X}^{x} f(x)\,dx$, La dimostrazione di Cauchy del teorema fondamentale del calcolo fa leva su due risultati: la linearità dell'integrale e il teorema del valor intermedio per gli integrali (risultato quest'ultimo già formulato da Lagrange):

$$F(x+\alpha) - F(x) = \int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x+\theta\alpha),$$

con $0 \leq \theta \leq 1$.

Gustav Lejeune Dirichlet

Sulla convergenza delle serie trigonometriche che servono a rappresentare una funzione arbitraria entro due limiti dati (1829)

9.

Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

Les séries de sinus et de cosinus, au moyen desquelles on peut représenter une fonction arbitraire dans un intervalle donné, jouissent entre autres propriétés remarquables aussi de celle d'être convergentes. Cette propriété n'avait pas échappée au géomètre illustre qui a ouvert une nouvelle carrière aux applications de l'analyse, en y introduisant la manière d'exprimer les fonctions arbitraires dont il est question; elle se trouve énoncée dans le Mémoire qui contient ses premières recherches sur la chaleur. Mais personne, que je sache, n'en a donné jusqu'à présent une démonstration générale. Je ne connais sur cet objet qu'un travail dû à M. Cauchy et qui fait partie des Mémoires de l'Académie des sciences de Paris pour l'année 1823. L'auteur de ce travail avoue lui même que sa démonstration se trouve en défaut pour certaines fonc-

Bernhard Riemann: *Habilitationsschrift* 1853

XII.

Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.

(Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.)*)

Der folgende Aufsatz über die trigonometrischen Reihen besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen. Der erste Theil enthält eine Geschichte der Untersuchungen und Ansichten über die willkürlichen (graphisch gegebenen) Functionen und ihre Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen. Bei ihrer Zusammenstellung war es mir vergönnt, einige Winke des berühmten Mathematikers zu benutzen, welchem man die erste gründliche Arbeit über diesen Gegenstand verdankt. Im zweiten Theile liefere ich über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe eine Untersuchung, welche auch die bis jetzt noch unerledigten Fälle umfasst. Es war nöthig, ihr einen kurzen Aufsatz über den Begriff eines bestimmten Integrales und den Umfang seiner Gültigkeit voraufzuschicken.

Figure: Dalle *Riemann's Gesammelte Werke*, 1876, p. 213

"Il presente saggio sulle serie trigonometriche consiste di due parti essenzialmente distinte. La prima parte contiene una storia delle ricerche e delle opinioni intorno alle funzioni arbitrarie (date graficamente) e la loro rappresentazione attraverso serie trigonometriche. Nella sua composizione sono stato guidato da alcuni suggerimenti del celebre matematico al quale si deve il primo fondamentale lavoro sull'argomento. Nella seconda parte, fornisco una trattazione intorno alla rappresentazione di una funzione attraverso una serie trigonometrica che include casi che finora sono rimasti esclusi. A tal fine, si è reso necessario premettere a questa trattazione un breve saggio sul concetto di integrale definito e sull'ambito della sua validità."

Riemann spiega con particolare chiarezza il contenuto e la portata del lavoro di Dirichlet osservando come il problema della convergenza di una serie di Fourier non possa essere affrontato a partire dallo studio della decrescenza dei suoi termini (come invece Cauchy aveva creduto di poter fare) ma piuttosto sfruttando la relazione:

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin\alpha d\alpha\right)\sin x + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin 2\alpha d\alpha\right)\sin 2x + \dots$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha\right)\sin nx +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)d\alpha + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos\alpha d\alpha\right)\cos x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos 2\alpha d\alpha\right)\cos 2x + \dots \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha\right)\cos nx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\dfrac{x-\alpha}{2}}d\alpha.$$

Theorem (Dirichlet, 1829)

Data una funzione f periodica, di periodo 2π, tale che:
I) f è integrabile (welche durchgehends eine Integration zullässt);
II) f ha al più un numero finito di massimi e di minimi;
III) nei suoi punti di discontinuità assume il valore
$f(x) = 1/2\,(f(x+0) + f(x-0))$;
allora f è rappresentabile in serie di Fourier.

Osservazione: E' chiaro che una funzione che soddisfi a I) e II) ma non a III) non può essere rappresenta da una serie trigonometrica. Infatti, una siffatta rappresentazione devierebbe dalla funzione stessa nei suoi punti di discontinuità. D'altra parte, la trattazione di Dirichlet ha lasciato in sospeso la questione circa la necessità delle condizioni I) e II).

Bernhard Riemann: *Habilitationsschrift* 1853

224 XII. Ueber die Darstellbarkeit einer Function

Erstlich steht, wie Dirichlet selbst am Schlusse seiner Abhandlung bemerkt, dieser Gegenstand mit den Principien der Infinitesimalrechnung in der engsten Verbindung und kann dazu dienen, diese Principien zu grösserer Klarheit und Bestimmtheit zu bringen. In dieser Beziehung hat die Behandlung desselben ein unmittelbares Interesse.

Zweitens aber ist die Anwendbarkeit der Fourier'schen Reihen nicht auf physikalische Untersuchungen beschränkt; sie ist jetzt auch in einem Gebiete der reinen Mathematik, der Zahlentheorie, mit Erfolg angewandt, und hier scheinen gerade diejenigen Functionen, deren Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe Dirichlet nicht untersucht hat, von Wichtigkeit zu sein.

Figure: Dalle *Riemann's Gesammelte Werke*, 1876, p. 224

Bernhard Riemann: *Habilitationsschrift* 1853

Qual è il significato da attribuire a $\int_a^b f(x)dx$?

4.

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Consideriamo una successione di valori $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ compresi fra $x_0 := a$ e $x_n := b$. Poniamo $\delta_1 := x_1 - a, \delta_2 = x_2 - x_1, \ldots, \delta_n := b - x_{n-1}$. Siano ϵ_i, $i = 1, \ldots, n$ numeri razionali positivi minori di 1. La somma S dipende oltre che dalla scelta della partizione e dagli ϵ_i, $i = 1, \ldots, n$:

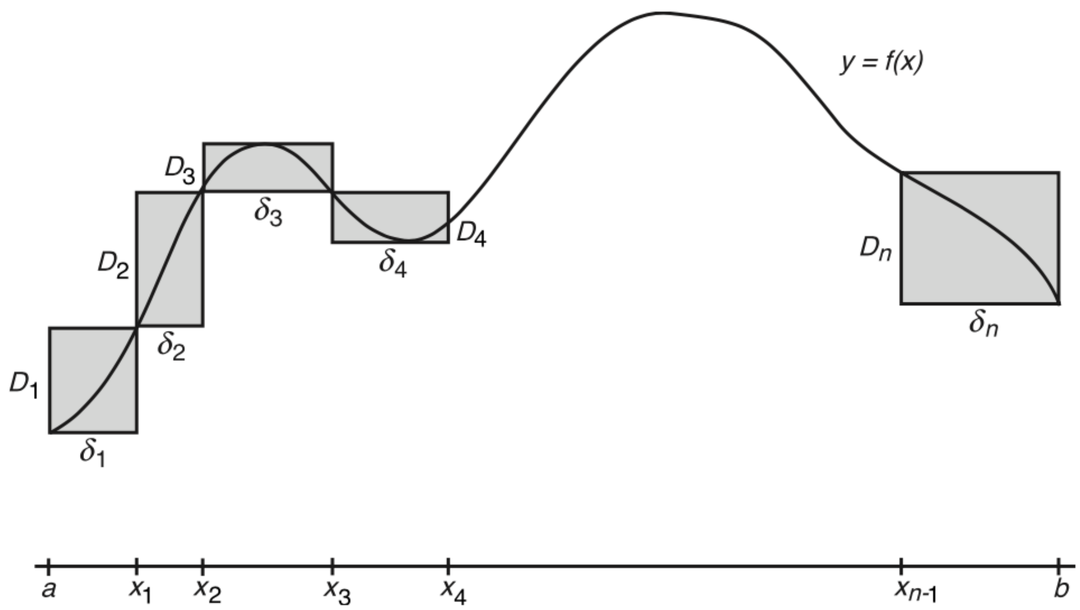
$$S(\delta, \epsilon) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k f(x_{k-1} + \epsilon_k \delta_k).$$

Definition

Se S gode della proprietà che, comunque scelti δ_k, ϵ_k, $k = 1, \ldots, n$, essa tende a un limite A, allora f è integrabile e si scriverà $\int_a^b f(x)dx := A$.

Due condizioni per l'integrabilità:
(I) Denotando con D_k l'oscillazione della funzione f fra x_k e x_{k-1}, occorre e basta che

$$R(\delta) := \sum_{k=1}^{n} \delta_k D_k \to 0, \quad \delta \to 0.$$



(II) Perché la somma R tenda a zero, è necessario e sufficiente che per qualunque scelta di $\sigma > 0$ la grandezza totale degli intervalli per i quali l'oscillazione di f è maggiore di σ tenda a zero al tendere di n all'infinito.
Notazioni: denotiamo con $\|\delta\| := \sup\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ (la norma della partizione P) e con $\Delta(d) := \sup_{\|\delta\| \leq d} R(\delta)$. Inoltre sia $s(P, \sigma) = \sum' \delta_k$, dove il simbolo ' indica che la somma deve essere eseguita su quei sottointervalli per i quali la oscillazione di f è maggiore di σ. Si avrà (verifica del fatto che (II) è condizione necessaria):

$$\sigma \cdot s(P, \sigma) \leq R(P) \leq \Delta(d).$$

Dal che si ricava:

$$s(P, \sigma) \leq \frac{\Delta(d)}{\sigma}.$$

Cioè: "la lunghezza totale degli intervalli in cui l'oscillazione è $> \sigma$, qualunque sia σ, può essere resa piccola a piacere per una opportuna scelta di d."

La condizione è anche sufficiente. Supponiamo infatti che $s(\sigma, P) \to 0$, per ogni $\sigma > 0$ e per $d \to 0$. Avremo:

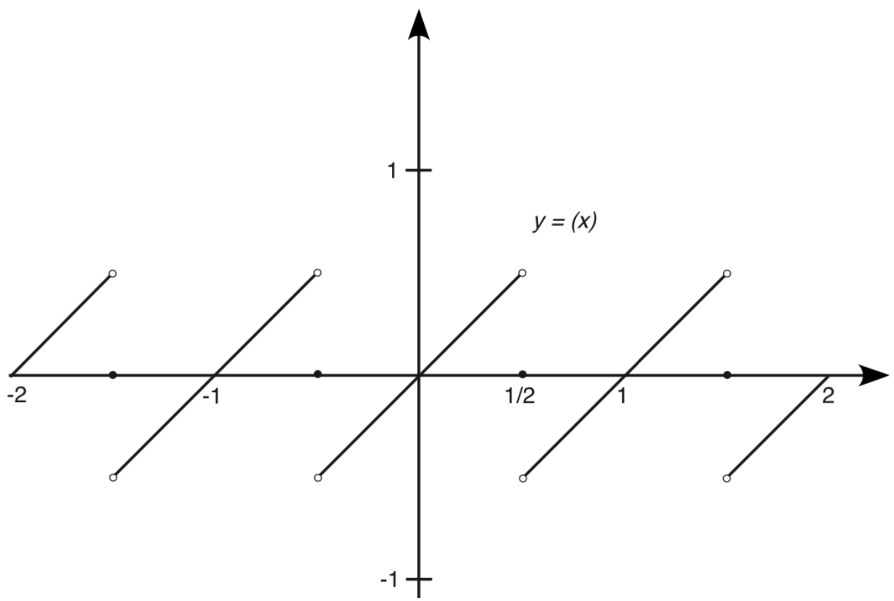
$$R(P) = \sum_k \delta_k D_k = \sum_{k \mid D_k > \sigma} \delta_k D_k + \sum_{k \mid D_k \leq \sigma} \delta_k D_k \leq D \cdot s(\sigma) + (b - a) \cdot \sigma$$

Poiché la precedente disuguaglianza vale per qualunque valore arbitrario di σ, possiamo scegliere σ piccolo a piacere. Inoltre sappiamo per ipotesi che per $d \to 0$ $s(\sigma) \to 0$. Cioè $R(P) \to 0$, cioè f è integrabile su $[a, b]$.

Un esempio di funzione che ha infiniti punti di discontinuità e che tuttavia è integrabile fu fornito per la prima volta proprio nell'*Habilitationsschrift*. L'esempio è il seguente:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kx)}{k^2},$$

dove la funzione $x \mapsto (x)$ è definita come $(x) := x - n(x)$, dove $n(x)$ è l'intero più vicino a x. Se $x = \pm\dfrac{2p+1}{2}$, si intende che $(x) = 0$.



L’esempio di Riemann